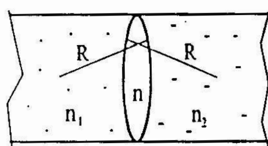
Državno natjecanje iz fizike '99 – 4. grupa

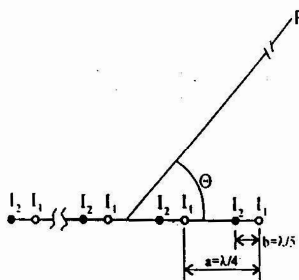
Zadatak 1 (16 bodova)

Odredi optičku moć (recipročna žarišna duljina) sustava koji se sastoji od tanke, simetrične, bikonveksne leće uronjene s jedne strane u sredstvo indeksa loma $n_1=1.33$ (voda), a s druge strane u sredstvo indeksa loma $n_2=1.63$ (ugljični bisulfid) – vidi sliku. Leća je načinjena od stakla indeksa loma $n=1.5$, a radijus zakrivljenosti njenih ploha je $R=30cm$. *Usporedi rezultat sa slučajem kad je s obje strane leće zrak* ($n_1=n_2=1$).
(Uputa: Provedi korektan izvod u aproksimaciji tanke leće i paraksijalnih zraka.)



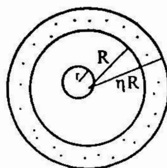
Zadatak 2 (20 bodova)

U ravnini se nalazi sustav od $2N=102$ točkasta izvora kružnih harmoničkih valova amplitude A i valne duljine λ. Svi izvori su smješteni na ravnoj liniji kao na slici. Izvori tipa I_1 titraju međusobno u fazi kao i izvori tipa I_2, ali izvori I_2 brzaju u fazi za $\Delta=\pi/15$ rad u odnosu na izvore I_1. Odredi amplitudu zračenja koju mjeri opažač u ravnini koji se nalazi pod kutem $\Theta=60°=\pi/3$ rad u odnosu na liniju na kojoj su smješteni izvori. Uzmi da je opažač jako daleko u odnosu na sustav izvora (udaljenost do opažača je puno veća od dimenzije sustava) i da se amplituda zračenja iz pojedinog izvora ne mijenja s udaljenošću od izvora.



Zadatak 3 (20 bodova)

Idealno crno tijelo oblika kugle radijusa r održava se termostatom na stalnoj temperaturi T. Ono je smješteno unutar evakuirane (vakuum) sferne ljuske unutrašnjeg radijusa R, a vanjskog radijusa η puta većeg od unutrašnjeg, koja je također idealno crno tijelo s unutrašnje i vanjske strane. Odredi omjer snage zračenja izračenog u okolnji prostor (izvan sferne ljuske) i zračenja koje izrači kugla u sfernoj ljusci. Zanemarite bilo kakve gubitke topline zbog vođenja. Zašto takvu ljusku zovemo radijacijskim štitom?

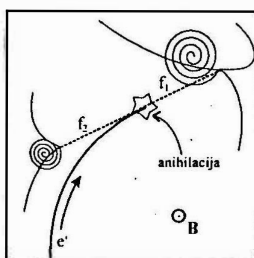


Zadatak 4 (14 bodova)

Elementarne čestice, njihove raspade i međusobne reakcije promatramo u Willsonovoj komori. Svojim prolaskom kroz fluid u komori nabijena čestica ga ionizira i ostavlja za sobom trag sitnih mjehurića koji ocrtavaju njenu putanju. Komora se stavlja u magnetsko polje koje svija putanje nabijenih čestica.

Donja slika prikazuje pozitron e^+ koji ulijeće relativističkom brzinom u smjeru strelice. On pogađa mirni elektron (u materiji) i s njim se anihilira u dva visokoenergetska fotona f_1 i f_2 od kojih se jedan giba u smjeru upadnog pozitrona , a drugi u suprotnom. Ti fotoni su na slici nacrtani crtkanim linijama. One se u realnosti ne vide već se detektiraju po reakcijama koje izazovu (mlazovi čestica na krajevima crtkanih linija). Komora se nalazi u homogenom magnetskom polju B=0.1 T usmjerenom prema "gore" iz ravnine slike. Radijus zakrivljenosti putanje pozitrona je R=3.5 cm. Odredi energije fotona nastalih anihilacijom (u MeV-ima).

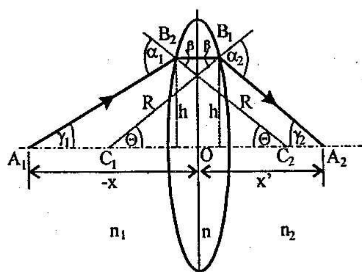
(Masa i naboj elektrona: $m=9.11\cdot10^{-31}$ kg = 0.51 MeV/c^2, $q=1.6\cdot10^{-19}$C; brzina svjetlosti: $c=3\cdot10^8$m/s)



Državno natjecanje iz fizike '99 – 4. grupa
RJEŠENJA ZADATAKA

Zadatak 1 (16 bodova)

Slika:



(3 boda)

Aproksimacija tanke leće:
Biramo zraku koja prolazi kao na slici. Za tanku leću su kutevi β na ulazu zrake u leću i na izlazu iz nje su približno jednaki; pripadne visine h su također približno jednake; kutevi Θ na lijevoj i desnoj strani su približno jednaki. Također vrijedi:

$$R=\underline{C_1B_1}\approx\underline{C_1O}$$
$$R=\underline{C_2B_2}\approx\underline{C_2O}$$
$$\underline{A_1B_2}\approx\underline{A_1O}\equiv -x$$
$$\underline{A_2B_1}\approx\underline{A_2O}\equiv x'$$

Na temelju toga sa slike očitavamo (predznak uz x je stvar konvencije):

$$tg(\gamma_1)\approx\frac{h}{-x},\ tg(\gamma_2)\approx\frac{h}{x'},\ \sin(\Theta)\approx\frac{h}{R}$$

(3 boda)

Zakon loma:

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\beta)}=\frac{n}{n_1},\ \frac{\sin(\alpha_2)}{\sin(\beta)}=\frac{n}{n_2}$$

(1 bod)

Aproksimacija paraksijalnih zraka:
Jer su zrake paraksijalne, kutevi α_1, α_2, β, γ_1, γ_2, Θ su mali. Za neki mali kut ϕ vrijedi $\sin(\phi)\approx\phi$, $tg(\phi)\approx\phi$. Odatle izvodimo:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{n}{n_1}\approx\frac{\alpha_1}{\beta}\ \Rightarrow\ \alpha_1=\frac{n}{n_1}\beta\\ \frac{n}{n_2}\approx\frac{\alpha_2}{\beta}\ \Rightarrow\ \alpha_2=\frac{n}{n_2}\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\ \alpha_1+\alpha_2=\left(\frac{n}{n_1}+\frac{n}{n_2}\right)\beta\qquad (I)$$

$$\gamma_1\approx-\frac{h}{x}$$
$$\gamma_2\approx\frac{h}{x'}$$
$$\Theta\approx\frac{h}{R}$$

(4 boda)

2

Iz slike slijedi:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 &= \gamma_1 + \Theta \\ \alpha_2 &= \gamma_2 + \Theta\end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = \gamma_1 + \gamma_2 + 2\Theta \quad \text{(II)}$$

Vrijedi nadalje (kutevi s paralelnim kracima):

$$\Theta = \beta \quad \text{(III)}$$

(1 bod)

Kombiniranjem (I), (II), (III) slijedi:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \left(\frac{n}{n_1} + \frac{n}{n_2} - 2\right)\Theta$$

Uvrštavanjem izraza za γ_1, γ_2, Θ izlazi (nakon dijeljenja jednadžbe s h):

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \left(\frac{n}{n_1} + \frac{n}{n_2} - 2\right)\frac{1}{R},$$

odnosno za optičku moć:

$$J = \frac{1}{f} = \left(\frac{n}{n_1} + \frac{n}{n_2} - 2\right)\frac{1}{R} = 0.16\text{m}^{-1}$$

(3 boda)

Za leću u zraku ($n_1 = n_2 = 1$):

$$J_0 = \left(\frac{n}{n_1} - 1\right)\frac{2}{R} = 3.33\text{m}^{-1}$$

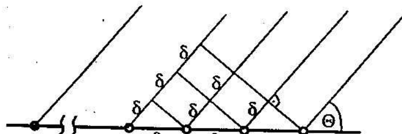
što znači da se stavljenjem leće u sredstvo optička moć smanji za $(J_0 - J)/J_0 = 95\%$.

(1 bod)

Zadatak 2 (20 bodova)

Radi se o 2 sustava od N=51 izvora, udaljenih međusobno za $a = \lambda/4$, smještenim jedan u drugi na udaljenosti $b = \lambda/5$. Najprije ćemo izračunati amplitudu svakog podsustava (one su iste, ali pomaknute u fazi), a zatim ih zbrojiti.

Amplituda podsustava N izvora:



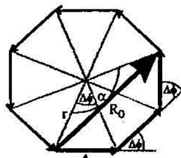
Amplituda podsustava jednaka je sumi N amplituda iznosa A od kojih je svaka pomaknuta u fazi za $\Delta\varphi$ u odnosu na prethodnu, gdje je:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda}a\cos(\Theta) = \frac{\pi}{4}$$

(4 boda)

Sumu tih amplituda možemo prikazati poligonom od $k = \dfrac{2\pi}{\Delta\varphi} = 8$ kuteva:

3



Suma vektora koji "napune" sve stranice poligona (njih 8) iznosi 0. Dakle, rezultantnoj amplitudi R_0 doprinosi

$$n = N - k \cdot \mathrm{Int}\left(\frac{N}{k}\right) = 51 - 8 \cdot 6 = 3$$

vektora koji preostanu nakon što se poligon određeni cijeli broj puta (6) "napunio".

Za poligon vrijedi:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= n \cdot \Delta\varphi \\ R_0 &= 2r\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ A &= 2r\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow R_0 = A\frac{\sin\left(\frac{n \cdot \Delta\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}$$

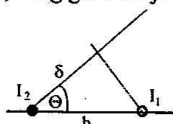
Dakle,

$$R_0 = A\frac{\sin\left(n\pi\frac{a}{\lambda}\cos(\Theta)\right)}{\sin\left(\pi\frac{a}{\lambda}\cos(\Theta)\right)} = A\frac{\sin\left(3\frac{\pi}{8}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)} = 2.414 \cdot A$$

(8 bodova)

Rezultantna amplituda podsustava 1 i 2:

Oba podsustava titraju amplitudama iznosa R_0. Podsustav 2 brza u fazi za Δ pred podsustavom 1, pa od razlike faza, zbog geometrijskog hoda zrake δ, treba oduzeti Δ.

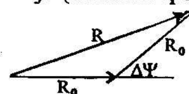


Ukupna razlika faza pri zbrajanju amplituda podsustava iznosi:

$$\Delta\psi = -\Delta + \frac{2\pi}{\lambda}\delta = -\Delta + \frac{2\pi}{\lambda}b\cos(\Theta) = -\frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{15}$$

(4 boda)

Rezultantna amplituda je (kosinusni poučak):



$$R = 2R_0\cos\left(\frac{\Delta\psi}{2}\right)$$

$$R = 2A\frac{\sin\left(n\pi\frac{a}{\lambda}\cos(\Theta)\right)}{\sin\left(\pi\frac{a}{\lambda}\cos(\Theta)\right)}\cos\left(\pi\frac{b}{\lambda}\cos(\Theta)-\frac{\Delta}{2}\right)$$

$$= 2\cdot 2.414\cdot A\cos\left(\frac{\pi}{15}\right) = 4.723\cdot A$$

(4 boda)

Zadatak 3 (20 bodova)

Snaga koju zrači crno tijelo temperature T je $P=\sigma T^4 S$ (S je površina tijela). Zračenje s površine crnog tijela je disperzivno pa položaj kugle u ljusci nije bitan. Snaga koju zrači kugla je:

$$P_0=\sigma T^4 4\pi r^2.$$ (1 bod)

To zračenje pada na unutrašnju stijenku šupljine i potpuno se apsorbira. Šupljina (jer je crno tijelo s obje strane) mora izračiti istu snagu koja je pala na nju, dio s unutrašnje stijenke (P_{in}) i dio s vanjske (P_{out}). Ti dijelovi proporcionalni su površini odgovarajuće stijenke.

$$\left.\begin{aligned} & P_0 = P_{in} + P_{out} \\ & \frac{P_{in}}{P_{out}} = \frac{S_{in}}{S_{out}} = \frac{R^2}{(\eta R)^2} = \frac{1}{\eta^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\begin{aligned} & P_{out} = \frac{\eta^2}{\eta^2+1}P_0 \\ & P_{in} = \frac{1}{\eta^2+1}P_0 \end{aligned}\right.$$

(4 boda)

Zračenje koje izrači unutrašnja stijenka šupljine pada (disperzivno) opet na unutrašnjost šupljine i na malu kuglu. Dio koji padne na kuglu "otpada iz daljnje igre" jer kuglu održavamo na stalnoj temperaturi, a dio koji padne na stijenku šupljine biva opet apsorbiran i izračen dijelom unutra, a dijelom van u istom omjeru kao i u prvom koraku. Taj proces odvija se beskonačno koraka i predstavlja konvergentni red doprinosa koje treba zbrojiti.

1. korak:
Na ljusku iznutra padne zračenje

$$P_0^{(1)} = P_{in}\frac{S_{in}-S_{kugle}}{S_{in}} = P_{in}\frac{R^2-r^2}{R^2} = \frac{1}{\eta^2+1}P_0\frac{R^2-r^2}{R^2},$$

prema van se od toga izrači

$$P_{out}^{(1)} = \frac{\eta^2}{\eta^2+1}P_0^{(1)} = \frac{\eta^2}{(\eta^2+1)^2}P_0\frac{R^2-r^2}{R^2},$$

a prema unutra

$$P_{in}^{(1)} = \frac{1}{\eta^2+1}P_0^{(1)} = \frac{1}{(\eta^2+1)^2}P_0\frac{R^2-r^2}{R^2}$$

(5 bodova)

5

2. korak:

$$P_0^{(2)} = P_{in}^{(1)} \frac{S_{in} - S_{kugle}}{S_{in}} = \frac{1}{(\eta^2+1)^2} P_0 \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2} \right)^2$$

$$P_{out}^{(2)} = \frac{\eta^2}{\eta^2+1} P_0^{(2)} = \frac{\eta^2}{(\eta^2+1)^3} P_0 \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2} \right)^2$$

$$P_{in}^{(2)} = \frac{1}{\eta^2+1} P_0^{(2)} = \frac{1}{(\eta^2+1)^3} P_0 \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2} \right)^2$$

3. korak:

$$P_0^{(3)} = P_{in}^{(2)} \frac{S_{in} - S_{kugle}}{S_{in}} = \frac{1}{(\eta^2+1)^3} P_0 \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2} \right)^3$$

$$P_{out}^{(3)} = \frac{\eta^2}{\eta^2+1} P_0^{(3)} = \frac{\eta^2}{(\eta^2+1)^4} P_0 \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2} \right)^3$$

$$P_{in}^{(3)} = \frac{1}{\eta^2+1} P_0^{(3)} = \frac{1}{(\eta^2+1)^4} P_0 \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2} \right)^3$$

.
.
.

n-ti korak:

$$P_0^{(n)} = \frac{1}{(\eta^2+1)^n} P_0 \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2} \right)^n$$

$$P_{out}^{(n)} = \frac{\eta^2}{\eta^2+1} P_0 \frac{1}{(\eta^2+1)^n} \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2} \right)^n$$

$$P_{in}^{(n)} = \frac{1}{\eta^2+1} P_0 \frac{1}{(\eta^2+1)^n} \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2} \right)^n$$

(5 bodova)

Ukupna izračena snaga van je suma svih doprinosa:

$$P_{OUT} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{out}^{(n)}$$

$$= \frac{\eta^2}{\eta^2+1} P_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\eta^2+1} \frac{R^2 - r^2}{R^2} + \left(\frac{1}{\eta^2+1} \frac{R^2 - r^2}{R^2} \right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{\eta^2+1} \frac{R^2 - r^2}{R^2} \right)^n + \ldots \right\}$$

$$= \frac{\eta^2}{\eta^2+1} P_0 \sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad , \quad q \equiv \frac{1}{\eta^2+1} \frac{R^2 - r^2}{R^2} < 1$$

Suma u gornjem rezultatu je konvergentni geometrijski red (q<1) čija suma iznosi $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ pa dobivamo

6

$$P_{OUT} = \frac{\eta^2}{\eta^2+1} P_0 \frac{1}{1 - \frac{1}{\eta^2+1}\frac{R^2 - r^2}{R^2}}$$

Sređivanjem gornjeg izraza dobivamo traženi omjer:

$$\frac{P_{OUT}}{P_0} = \frac{(\eta R)^2}{(\eta R)^2 + r^2} = \frac{R_{out}^2}{R_{out}^2 + r^2} \quad , \quad R_{out} \equiv \eta R$$

Iz gornjeg rezultata se vidi da snaga izračena van ovisi samo površini vanjske stijenke ljuske. Ljusku nazivamo radijacijskim štitom jer smanjuje snagu izračenu u vanjski prostor (za gore izračunati faktor).

(5 bodova)

Zadatak 4 (14 bodova)

Proces se odvija kao na slici:



(1 bod)

ZSE: $E_{TOT}^{(prije)} = E_{TOT}^{(poslije)}$

$$\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + mc^2 = E_1 + E_2$$

(3 boda)

ZSI: $p_{TOT}^{(prije)} = p_{TOT}^{(poslije)}$

$$p = \frac{E_1}{c} - \frac{E_2}{c}$$

(3 boda)

Kombinacijom ZSI i ZSE nalazimo:

$$E_1 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + mc^2 + pc\right]$$

$$E_2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + mc^2 - pc\right]$$

(3 boda)

Iz zadanih podataka treba odrediti impuls pozitrona p (on definira rješenje). Izjednačimo Lorentzovu silu (izraz vrijedi u relativističkoj fizici) s centripetalnom (paziti na relativističku promjenu mase):

$$qvB = \gamma m \frac{v^2}{R} \quad , \quad \gamma \equiv \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Relativistički impuls je:

$$p \equiv \gamma m v = qBR$$

$$p = 5.6 \cdot 10^{-22} \text{ kg m/s} = 1.05 \text{ MeV/c}$$

Izravnim uvrštavanjem u izraze za energije fotona slijedi:

$$E_1 = 1.36 \text{ MeV}$$
$$E_2 = 0.32 \text{ MeV}$$

(4 boda)

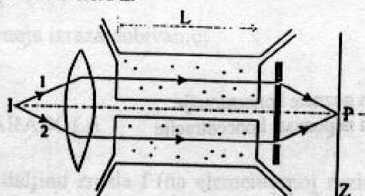
Državno natjecanje iz fizike 2000. – 4. grupa

Zadatak 1 (20 bodova)

Cilindrična posuda s tekućinom rotira konstantnom kutnom brzinom ω oko svoje osi uslijed čega površina tekućine poprima konkavan oblik. Odredi krivulju koju slijedi površina tekućine i žarišnu daljinu takvog "zrcala" ako nam je poznata činjenica da sve zrake svjetlosti, koje upadnu paralelno s osi rotacije, bivaju fokusirane u jednoj točki.

Zadatak 2 (20 bodova)

Slika shematski prikazuje interferencijski uređaj za mjerenje indeksa loma plinova i tekućina. Svjetlost iz izvora valne duljine λ=589nm prolazi kroz dvije jednake cijevi ispunjene zrakom (indeks loma n_z=1.000293) duljine L=10cm. Iza njih se nalazi dijafragma s dvije pukotine koje daju interferentnu sliku na zastoru Z.

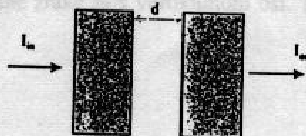


a) Odredi indeks loma ugljičnog monoksida (CO) ako se svjetla interferencijska pruga pomakne za k=7 međusobnih razmaka kada u jednu cijev umjesto zraka stavimo CO.
b) Kolika je minimalna razlika indeksa loma dvije tvari u cijevima koju je moguće odrediti ovim uređajem?
c) Ako se u obje cijevi nalazi voda (n_v=4/3), odredi minimalnu brzinu v kojom se voda u jednoj od cijevi treba gibati (u smjeru širenja svjetlosti) da bi se u točki P (os simetrije) na zastoru pojavila destruktivna interferencija. Uzmi da se voda giba jednoliko duž cijele duljine L, da je brzina gibanja vode mnogo manja od brzine svjetlosti $c=3\cdot10^8$m/s, te da vrijedi aproksimacija $(1+x)^{-1}\approx1-x$, $x<<1$.

Zadatak 3 (20 bodova)

Interferometar Fabry-Perot sastoji se od dvije paralelne ravne ploče razmaknute za mali razmak d između kojih se nalazi vakuum. Svaka ploča propušta dio određen faktorom T^2, a reflektira dio R^2 upadnog intenziteta svjetlosti (apsorpciju zanemarujemo). Refleksije svjetlosti koje fizikalno uzimamo u obzir odvijaju se između ploča. Ako s lijeve strane na uređaj pada svjetlost valne duljine λ i intenziteta I_{in}, odredi intenzitet I_{out} koji s desne strane izlazi iz uređaja.

(Uputa: Intenzitet je kvadrat apsolutne vrijednosti amplitude vala. Amplitude valova pomaknutih u fazi najlakše je zbrojiti ako ih predstavimo vektorima u ravnini kompleksnih brojeva).



Zadatak 4 (10 bodova)

Da bi odredili ukupni volumen krvi pacijenta, liječnici mu u krvotok ubrizgaju određenu količinu radioaktivnog nuklida konstantne raspada $\lambda=2.5\cdot10^{-4}s^{-1}$. Nakon vremena od τ=2h, kada se nuklid jednoliko rasporedio po krvotoku, izvade mu uzorak krvi volumena v=10cm^3 i mjerenjem ustanove da je radioaktivna aktivnost tog uzorka za faktor $\eta=2.76\cdot10^{-4}$ puta manja od početne aktivnosti ukupne količine nuklida prije ubrizgavanja. Koliki je ukupni volumen krvi pacijenta? Pretpostavi da je volumen ubrizganog nuklida zanemariv prema ukupnom volumenu krvi.

Državno natjecanje iz fizike 2000. – 4. grupa
RJEŠENJA ZADATAKA

Zadatak 1 (20 bodova)

(3 boda)

Da bi se fokusirale u istoj točki (F), zrake 1 i 2 moraju tamo stići u istom trenutku. To znači da za prijeđene puteve mora vrijediti:

$$|A'O| + |OF| = |AF|$$

$$y + f = \sqrt{(y - f)^2 + x^2}$$

Nakon kvadriranja i reduciranja izraza dobivamo:

$$y = \frac{1}{4f}x^2$$

Traženi oblik krivulje je PARABOLA.

(5 bodova)

Da bismo odredili žarišnu daljinu zrcala f (na elementarnoj razini), promatrat ćemo refleksiju zrake z_1 na njegovoj plohi.

Nagib ϕ tangente na plohu t određen je ravnotežom sila koje djeluju na česticu tekućine (gravitacijska G, centrifugalna F_{cf}, sila među česticama tekućine) pa je na udaljenosti x od ishodišta:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{F_{cf}}{G} = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2}{g}x \qquad \text{(4 boda)}$$

Položaj fokusa određen je presjecištem reflektirane zrake z_2 s vertikalnom osi. Treba odrediti jednadžbu pravca te zrake:

$$y - y_0 = k\cdot(x - x_0) \Rightarrow \quad y = k\cdot x + y_0 - k\cdot x_0$$

$$k = \mathrm{tg}\,\Psi$$

Sa slike očitavamo:

$$\left.\begin{aligned} \varphi + \alpha &= \frac{\pi}{2} \\ \Psi + \alpha + \pi - \varphi &= \pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Psi = 2\varphi - \frac{\pi}{2}$$

$$k = \mathrm{tg}\,\Psi = -\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right) = -\frac{1}{\mathrm{tg}\,2\varphi} = \frac{\mathrm{tg}^2\varphi - 1}{2\mathrm{tg}\,\varphi} \qquad \text{(4 boda)}$$

Znamo da z_2 prolazi točkom (0,f) pa je njena jednadžba:

$$y = k\cdot x + f$$

Usporedbom s općim oblikom jednadžbe proizlazi da je:

$f = y_0 - k \cdot x_0$

Uvrštavanjem izraza za k i tg ϕ (u točki $x=x_0$) dobivamo:

$$f = \underbrace{y_0 - \frac{\omega^2}{2g} x_0^2}_{=0} + \frac{g}{2\omega^2}$$

Suma prva dva člana mora isčeznuti jer se u njoj nalazi ovisnost o koordinatama točke na zrcalu u kojoj se zraka reflektira, a po pretpostavci zadatka sve zrake se sjeku u 1 fokusu neovisno o točki u kojoj pogode zrcalo.
(Uočimo da iz tog uvjeta direktno možemo očitati oblik krivulje zrcala i bez postupka s početka zadatka: $y = (\omega^2/2g)x^2$.)
Dakle, žarišna daljina iznosi:

$$f = \frac{g}{2\omega^2}$$ (4 boda)

Napomena: Gore izneseno rješenje dobiveno je korištenjem elementarne matematike. Čak je i uvjet o prolasku svih zraka kroz 1 fokus dan iz istog razloga. Osnovno poznavanje infinitezimalnog računa omogućilo bi nalaženje rješenja "u nekoliko redaka" tj. direktno iz poznavanja nagiba tangente na krivulju zrcala (prva derivacija krivulje $y'(x) = \text{tg}\, \phi = (\omega^2/g)x$ je koeficijent smjera tangente u točki x) mogli bi integriranjem naći funkcijsku ovisnost same krivulje zrcala ($y = \int y'(x)dx = \int(\omega^2/g)x dx = (\omega^2/2g)x^2$).

Zadatak 2 (20 bodova)

a) Razlika optičkih puteva zrake 1 i 2:

$\delta = L \cdot (n - n_z)$, $\delta = k\lambda$

Pomak od k=7 razmaka prouzročen je razlikom indeksa loma ugljičnog monoksida n i zraka n_z. Indeks loma ugljičnog monoksida je:

$$n = n_z + (k\lambda/L) = 1.000293 + 0.000041 = 1.000334$$ (4 boda)

b) Najmanjoj mjerljivoj razlici indeksa loma odgovara situacija kada se u točki P interferentna slika promjeni iz svjetle u tamnu tj. postigne fazna razlika π odnosno razlika optičkih puteva $\lambda/2$ pa je:

$$\Delta n_{min} = \lambda/2L = 3 \cdot 10^{-6}$$ (4 boda)

Vidimo da je osjetljivost veća što je cijev uređaja dulja, a valna duljina svjetlosti manja.

c) Neka u cijevi 1 voda miruje – brzina širenja svjetlosti je $c_1 = c/n_v$. U cijevi 2 voda se giba brzinom v – brzina širenja svjetlosti dobiva se relativističkim zbrajanjem brzina:

$$c_2 = \frac{\dfrac{c}{n_v} + v}{1 + \dfrac{\frac{c}{n_v} v}{c^2}} = \left(\frac{c}{n_v} + v\right)\left(1 + \frac{v}{n_v c}\right)^{-1}$$ (3 boda)

Jer je v<<c, koristimo aproksimaciju $\left(1 + \frac{v}{n_v c}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{v}{n_v c}$ pa slijedi:

$$c_2 = \left(\frac{c}{n_v} + v\right)\left(1 - \frac{v}{n_v c}\right) = \frac{c}{n_v} + v - \frac{v}{n_v^2} - \frac{v^2}{n_v c} \approx \frac{c}{n_v} + v\left(1 - \frac{1}{n_v^2}\right),$$

gdje smo iz istog razloga zanemarili član s v^2. (2 boda)

Prolaskom kroz medij ne mijenja se frekvencija već valna duljina svjetlosti pa vrijedi:

$$c_1 = \lambda_1 \nu, \quad c_2 = \lambda_2 \nu$$

Fazna razlika zraka 1 i 2 nastaje zbog $\lambda_1 \neq \lambda_2$ i iznosi:

$$\Delta\varphi = 2L\pi\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)$$ (3 boda)

Uvrštavanjem gornjih izraza dobivamo:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\dfrac{c}{n_v} + \dfrac{v}{n_v^2}(n_v^2 - 1) - \dfrac{c}{n_v}}{\dfrac{c}{n_v}\left(\dfrac{c}{n_v} - \dfrac{v}{n_v^2}(n_v^2 - 1)\right)} L\nu$$

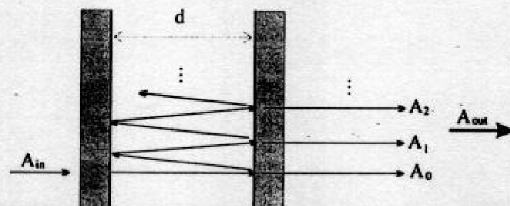
Zanemarenjem 2. člana (~v) u zagradi u nazivniku koji je puno manji od 1. (~c), redukcijom brojnika te korištenjem veze izvorne valne duljine izvora i frekvencije $\lambda = c/\nu$ dolazimo do izraza:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{L}{\lambda} \frac{v}{c}(n_v^2 - 1)$$ (4 boda)

Pojavi prve destruktivne interferencije odgovra fayna raylika $\Delta\phi = \pi$ pa je:

$$v = \frac{c\lambda}{2L(n_v^2 - 1)} = 1136 \text{m/s}$$ (2 boda)

Zadatak 3 (20 bodova)



Upadnom intenzitetu odgovara amplituda vala A_{in} ($I_{in} = |A_{in}|^2$). Dio amplitude koji ploča propušta dobije se množenjem upadne faktorom T, a reflektirani faktorom R. U

izlazni val doprinose, uz direktno transmitirani dio amplitude A_0, i zrake reflektirane 2, 4, 6,... puta (označene s A_1, A_2, A_3,...). Treba voditi računa da su valovi 1, 2, 3,... fazno pomaknuti u odnosu na referentni val 0 jer prelaze dodatni put duljine 2d, 4d, 6d,...

(5 bodova)

Označimo i-ti izlazni val s $Y_i = (A_i, \Delta\Psi_i)$ gdje je A_i njegova amplituda, a $\Delta\Psi_i$ njegov fazni pomak u odnosu na referentni izlazni val i=0.

$A_0 = TTA_{in} = T^2A_{in}$; $\quad \Delta\Psi_0 = 0$

$A_1 = TRRTA_{in} = T^2R^2Ain$; $\quad \Delta\Psi_1 = \phi$

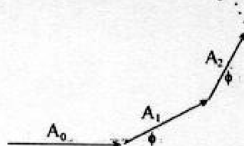
$A_2 = T R^2R^2TAin = T^2 R^4A_{in}$; $\quad \Delta\Psi_2 = 2\phi$

...

$A_n = T^2R^{2n}A_{in}$; $\quad \Delta\Psi_n = n\phi$; $\quad \phi = 4\pi d/\lambda$

(5 bodova)

Da bismo dobili intenzitet izlaznog vala, treba naći kvadrat apsolutne vrijednosti sume fazno pomaknutih amplituda A_i. Sumaciju je najlakše provesti prikažemo li amplitude A_i kompleksnim brojevima (jer oni sadrže informaciju o amplitudi i fazi).



$$A_{out} = A_0 + A_1e^{i\phi} + A_2e^{2i\phi} + ... + A_ne^{ni\phi} + ...$$

$$A_{out} = T^2A_{in}[1 + R^2e^{i\phi} + R^4e^{i\phi} + R^4e^{2i\phi} + ... + R^{2n}e^{ni\phi} + ...]$$

$$A_{out} = T^2A_{in}\sum_{n=0}^{\infty}\left(R^2e^{i\varphi}\right)^n$$

(5 bodova)

U gornjem izrazu figurira konvergentni geometrijski red $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, $q = R^2e^{i\phi} < 1$ jer je $R^2<1$ (vrijedi $R^2+T^2=1$) i $1 \geq |e^{i\phi}|$.

$$A_{out} = \frac{T^2}{1-R^2e^{i\varphi}}A_{in}$$

Izlazni intenzitet:

$$I_{out} = |A_{out}|^2 = A_{out}A_{out}^*$$

$$= \frac{T^4}{\left(1-R^2e^{i\varphi}\right)\left(1-R^2e^{-i\varphi}\right)}|A_{in}|^2$$

$$= \frac{T^4}{1+R^4-R^2\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)}I_{in}$$

$$= \frac{T^4}{1+R^4-2R^2\cos\varphi}I_{in}$$

$$I_{out} = \frac{T^4}{1+R^4-2R^2\cos\left(4\pi\frac{d}{\lambda}\right)}I_{in}$$

(5 bodova)

25

Zadatak 4 (10 bodova)

Radioaktivni raspad:
$N(t) = N_0e^{-\lambda t}$ – broj čestica u radioaktivnom uzorku
$A(t) = -dN/dt = \lambda N(t)$ – aktivnost uzorka

Nakon vremena $t=\tau$, aktivnost iznosi $A(\tau)=A_0e^{-\lambda\tau}$.

(4 boda)

Kada se nuklid homogeno rasporedi po krvotoku, aktivnost uzorka krvi po jedinici volumena iznosi u trenutku t: $A(t)/V$. Nakon vremena τ od ubrizgavanja vrijedi:

$$\frac{A_0e^{-\lambda t}}{V} = \frac{a}{v}$$

gdje je a aktivnost izvađenog uzorka krvi volumena v.
Kako je $a=\eta A_0$, proizlazi:

$$V = v\frac{e^{-\lambda\tau}}{\eta} = 5989\text{cm}^3 \approx 6\text{L}$$

(6 bodova)

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE 2001-4. grupa

Zadatak 1 (20 bodova)

Promotrite sustav od dvije tanke konvergentne leće L_1 i L_2 žarišnih daljina f_1 i f_2. Leće su međusobno udaljene D i postavljene su tako da im se optičke osi podudaraju.

a) Glavne ravnine optičkog sustava su ravnine koje imaju svojstvo da su točka koja se nalazi u jednoj glavnoj ravnini i konačna slika te točke koja se nalazi u drugoj glavnoj ravnini, jednako udaljene od optičke osi (predmet i konačna slika jednake su veličine). Te ravnine su okomite na optičku os sustava i pretpostavite da se nalaze u prostoru izvan leća. Nađite udaljenost Δ_1 jedne glavne ravnine od leće L_1 i udaljenost Δ_2 druge glavne ravnine od leće L_2!

b) Međusobno paralelne zrake koje upadaju na leću L_1 fokusiraju se nakon izlaska iz leće L_2 s druge strane u jednoj točki zvanoj fokus sustava F_2. Paralelne zrake koje upadaju prvo na leću L_2 fokusiraju se nakon izlaska iz leće L_1 u fokusu F_1. Izrazite preko D, f_1 i f_2 udaljenost fokusa F_1 i F_2 od položaja leća L_1 i L_2!

Radi jednostavnosti pretpostavite da je $D>f_1+f_2$. Promatrajte zrake svjetlosti koje će vas dovesti do rješenja za oba dijela zadatka.

Zadatak 2 (16 bodova)

Uzorak se sastoji od ogromnog broja kristalnih zrnaca koja su tako sitna da uzorak smatramo prahom. U uzorku se nalaze dvije vrste kristalnih zrnaca: A i B. Kristalna zrnca su idealna, to jest kristalne ravnine su definirane duž cijelog zrnca bez međusobnog presijecanja i susjedne ravnine su jednoliko razmaknute. Razmak susjednih ravnina u kristalnim zrncima vrste A je 300pm, a u zrncima vrste B 144pm. Kristalna zrnca su nasumično usmjerena u svim pravcima, što znači da su i kristalne ravnine također usmjerene u svim pravcima. Taj uzorak obasja se dobro usmjerenim monokromatskim snopom x-zraka valne duljine 185pm. Pretpostavite da je prah takav da x-zraka može doći nesmetano do svih zrnaca. Nakon refleksije na uzorku snop daje interferencijsku sliku na ravnoj fotografskoj ploči udaljenoj 65cm od uzorka i postavljenoj okomito na pravac dolaznog snopa x-zraka prije refleksije.

i) Skicirajte put dviju x-zraka koje se reflektiraju na atomima iz susjednih ravnina jednog kristalnog zrnca i međusobno interferiraju te izračunajte mogući kut (ili kutove) pod kojim se javlja izlazni interferencijski maksimum tih zraka s obzirom na smjer upadnih zraka, i to posebno za kristalno zrno A i kristalno zrno B!

ii) Kakva slika nastaje na fotografskoj ploči ako se difrakcija događa na opisanom uzorku? Sliku opišite veličinama koje smatrate potrebnim!

iii) Kakvu sliku daje difrakcija na uzorku u slučaju da energija upadnih x-zraka postane manja od 2keV?

iv) Kakvu sliku očekujete kada se uzorak obasja γ-zrakama energije 2MeV?

Zadatak 3 (18 bodova)

Za pogon u svemiru predložena je tanka lagana ploča izuzetne moći refleksije zračenja. Ploča je u obliku kvadrata stranice 100m i ona služi za pokretanje satelita. Satelit se nalazi na putanji oko Sunca. Intenzitet Sunčeve energije na udaljenosti $1{,}5\ 10^{11}$m (toliko je Zemlja udaljena od Sunca) iznosi $1374 J/m^2s$. Sunce emitira fotone radijalno prema van i jednako u svim smjerovima. Pretpostavite da satelit u trenutku promatranja kruži na udaljenosti $6\ 10^{11}$m od Sunca.

i) Pogonska ploča je postavljena tako da okomica na tu ploču leži u ravnini putanje i zakrenuta je za kut θ od smjera kretanja satelita. Kolika je sila na satelit u smjeru njegovog gibanja koja nastaje zbog odbijanja roja fotona o ploču?

ii) Pri kutu $\theta = 54{,}7^o$ iz prethodnog dijela zadatka sila na satelit u smjeru njegovog kretanja koju proizvode fotoni bit će najveća. Koliki je tada njen iznos?

Zadatak 4 (16 bodova)

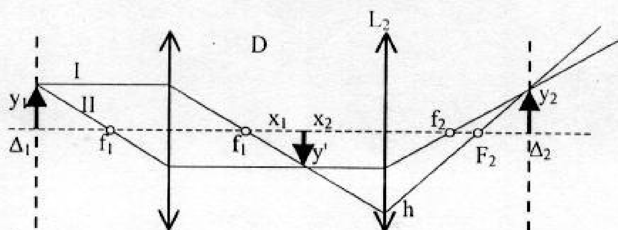
U katodnoj cijevi televizora elektroni se iz stanja mirovanja ubrzavaju naponom 15kV. Nakon ubrzavanja elektron prolazi kroz rupicu promjera 0,5mm i udara u sredinu zaslona koji je udaljen 30cm od rupice. Kolika je neodređenost položaja na kojem elektron dolazi na ekran nakon što je prošao kroz spomenutu rupicu? Komentirajte kako načelo neodređenosti utječe na jasnoću slike!

Konstante:
brzina svjetlosti $c=3\ 10^8$ m/s
Planckova konstanta $h=6{,}626\ 10^{-34}$Js
naboj elektrona $e=1{,}6\ 10^{-19}$C

DN – 2001.g.

Rješenja zadataka 4. grupe i smjernice za bodovanje

Zadatak 1 (20 bodova)



slika: **4boda**

Promotrimo dvije zrake svjetlosti I i II. Zraka I će nam u presjeku sa optičkom osi sustava dati fokus F2 u koji bi padale i ostale zrake paralelne sa I. Zraka II sa zrakom I služi nam za konstrukciju slike. Uzmimo da se predmet i slika nalaze u glavnim ravninama i udaljeni su Δ_1 i Δ_2 od leća L_1 i L_2. Tada visine predmeta i slike moraju biti jednake. Jednadžbe leća su: $\frac{1}{\Delta_1}+\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f_1}$ i $\frac{1}{\Delta_2}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{f_2}$ gdje su x_1 udaljenost slike od leće L_1 nakon prolaska zrake kroz leću L_1, a x_2 udaljenost te slike koja služi kao predmet za leću L_2 do te leće. Vrijedi jednakost $x_1 + x_2 = D$. **3boda**

Za visine predmeta y_1, konačne slike y_2 i međuslike y' vrijede relacije: $\frac{x_1}{y'}=\frac{\Delta_1}{y_1}$ i $\frac{x_2}{y'}=\frac{\Delta_2}{y_2}$. Budući da smo odabrali predmet i glavnu sliku u glavnoj ravnini, mora biti $y_1 = y_2$. **3boda**

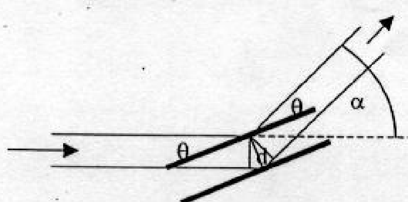
a) Rješavanjem ovog sustava jednadžbi dobije se udaljenost glavnih ravnina Δ_1 i Δ_2 od leća L_1 i L_2: $\Delta_1 = \frac{Df_1}{D-f_1-f_2}$ i $\Delta_2 = \frac{Df_2}{D-f_1-f_2}$. **3boda**

b) Zbog sličnosti trokuta možemo pisati (prateći sliku): $\frac{y_1}{f_1}=\frac{h}{D-f_1}$ i $\frac{y_2}{\Delta_2 - F_2}=\frac{h}{F_2}$.

2boda Dijeleći te dvije jednadžbe, uzimanjem $y_1=y_2$ te uvrštavanjem Δ_2 dobije se $F_2 = \frac{f_2(D-f_1)}{D-f_1-f_2}$. Zbog simetrije možemo napisati i: $F_1 = \frac{f_1(D-f_2)}{D-f_1-f_2}$. **5bodova**

Zadatak 2 (16 bodova)

a) Zrake mogu interferirati samo ako je kut između upadne zrake i površine kristala jednak kutu između izlazne zrake i površine kristala. Tada je razlika prijeđenog puta gornje i donje zrake jednaka $2\,d\sin\theta$. **2boda**



Da bi interferencija bila konstruktivna, mora biti $2d\sin\theta = k\lambda$. d je razmak među susjednim ravninama, θ je kut između upadne zrake i površine kristala, λ valna duljina x-zraka, a k redni broj maksimuma. Kut pod kojim se javlja konstruktivna interferencija je $\alpha = 2\theta$ s obzirom na smjer

upadnih zraka. **1bod + slika 2boda**

Uzimajući zadane vrijednosti d_A=300pm, d_B=144pm, λ=185pm dobiju se kutovi prikazani u sljedećoj tablici: **2boda**

Uzorak A			Uzorak B		
k	θ_{Ak}	α_{Ak}	k	θ_{Bk}	α_{Bk}
1	18°	36°	1	40°	80°
2	38°	76°			
3	67,7°	135,4°			

b) Budući da ima mnogo nasumično orijentiranih zrna, doći će do konstruktivne interferencije na svim zrnima kojima je kristalna ravnina nagnuta pod kutom θ s obzirom na upadni snop, i to u svim smjerovima. Stoga će slika na ravnoj okomitoj fotografskoj ploči biti svijetla kružnica. **3boda**

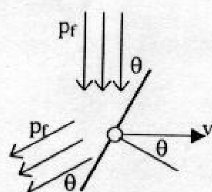
Budući da su dopušteni maksimumi pod kutovima α na bilo koju stranu s obzirom na smjer upadnog snopa, polumjeri kružnica će biti $l\,tg\,\alpha$, gdje je l=0,65m. U obzir dolaze kutovi α_{A1}, α_{A2} i α_{B1} koji su manji od 90°. Tako će polumjeri svijetlih kružnica na ploči iznositi d_{A1}=47 cm, d_{A2}=260 cm i d_{B1}=368 cm.

Središta su im na produžetku ulaznog snopa. **2boda**

c) Energiji E=2keV odgovara valna duljina $\lambda=hc/E$=620pm. Tada je $\lambda>2d$ i pojavljuje se samo prolazni nulti maksimum koji je oslabljen zbog apsorpcije. **2boda**

d) Energiji E=2MeV odgovara valna duljina $\lambda=hc/E$=0,62pm. Tada će biti $k=2d/\lambda$ interferencijskih maksimuma, što za uzorak A iznosi 967, a za uzorak B 464. Tako velik broj kružnica bit će vrlo teško razlučiti jedne od drugih. **2boda**

Zadatak 3 (18 bodova)



a) Fotoni upadaju na ploču pod kutom θ i pod istim kutom se od nje odbijaju. Ukupno skretanje fotona je 2θ pa je promjena količine gibanja jednog fotona u smjeru vektora **v** jednaka $p_f \sin 2\theta$. Toliku količinu gibanja predaje jedan foton satelitu u smjeru gibanja. **3boda + 2boda slika**

Vrijedi: $I=\frac{E}{St}=\frac{Nh\nu}{St}=\frac{Nhc}{St\lambda}=\frac{Ncp_f}{St}$, gdje je I intenzitet zračenja na mjestu satelita, S površina poprečnog presjeka snopa fotona koji pada na ploču, N/t broj fotona koji pada na ploču u jedinici vremena, ν frekvencija, λ valna duljina fotona, c je brzina svjetlosti i h Planckova konstanta. **3boda**

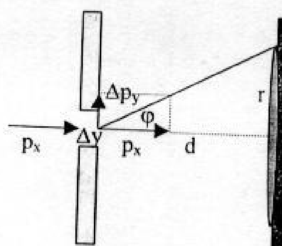
Pretpostavljamo da na ploče pada paralelan snop fotona jer je udaljenost od Sunca puno veća od dimenzija ploče. Ukupna količina gibanja koju fotoni predaju satelitu u smjeru njegova gibanja po jedinici vremena, to jest sila, iznosi $\frac{\Delta P}{\Delta t}=\frac{\Delta N}{\Delta t}p_f \sin 2\theta=\frac{IS}{c}\sin 2\theta$. **2boda** Površina snopa koji pada na ploče jednaka je $l^2 \sin\theta$ jer je ploča nagnuta za kut θ s obzirom na dolazni smjer fotona. **2boda**

Budući da intenzitet zračenja sa Sunca opada sa kvadratom udaljenosti, to je $I=I_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^2=1374 J/m^2 s\cdot\frac{1}{16}$, gdje je I_0 intenzitet na udaljenosti r_0 (Zemljinoj udaljenosti od Sunca), a r je udaljenost satelita od Sunca. **2boda**

Tako je ukupna sila na satelit u smjeru gibanja $F = \frac{l^2 I}{c}\sin\theta \sin 2\theta$. **2bod**

b) Uvrštavanjem u izraz za silu dobije se F=2,2mN. **2boda**

Zadatak 4 (16 bodova)



Elektron se ubrzava razlikom potencijala V nakon čega mu je kinetička energija $K = eV$.
Količina gibanja je u horizontalnom smjeru (definiramo kao x-smjer) i iznosi

$p_x = \sqrt{2mK} = \sqrt{2meV} = 6{,}61 \cdot 10^{-23} kgm/s$. **2boda**

Tolika je količina gibanja u x-smjeru i prije i poslije prolaska kroz rupu. (Ako računamo neodređenost $\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{\Delta x}$ i za Δx uzmemo d (pretpostavljena duljina unutar koje ne znamo gdje se elektron nalazi), dobijemo Δp_x=3,5 10^{-34}kgm/s, što je puno manje od p_x, to jest p_x smatramo određenom.)

Pri prolasku kroz rupicu položaj u y-smjeru određen je promjerom rupice Δy. Stoga je količina gibanja u y-smjeru neodređena prema izrazu $\Delta p_y \geq \frac{\hbar}{\Delta y}$. **4boda+2boda slika**

Kut za koji skreće elektron dan je s $\mathrm{tg}\varphi = \frac{\Delta p_y}{p_x}$. **1bod** Odatle je $r = d \cdot \mathrm{tg}\varphi = d\frac{\Delta p_y}{p_x} \geq \frac{d \cdot \hbar}{p_x \cdot \Delta y} = \frac{d \cdot \hbar}{\Delta y \cdot \sqrt{2meV}}$. **1bod** Uvrštavanjem zadanih veličina (d=0,3m, Δy=0,5mm, ħ=1,055 10^{-34}Js, m=9,11 10^{-31} kg, e=1,6 10^{-19}C, V=15kV) dobije se r≈1,6·10^{-9} m. To je najmanji promjer unutar kojega je nemoguće odrediti mjesto na koje će doći elektron. **3boda**

Načelo neodređenosti vrlo malo utječe na oštrinu slike. Greška iznosi svega 10 puta više od veličine atoma, što je neprimjetno na makroskopskoj skali promatranja. **3boda**

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE 2002.-4. grupa

Zadatak 1 (18 bodova)

Neke ribe imaju sjajno-srebrni izgled koji ih skriva dok plivaju osvijetljenim oceanom. Ta boja potječe od pločica izraslih na površini ribe. Svaka pločica sastoji se od nekoliko slojeva kristalnog gvanina (n_g=1,8) i citoplazme (n_c=1,33), koji se izmjenjuju jedan za drugim, tako da je sloj gvanina u dodiru s vodom (n_v=1,33) oko ribe. Pretpostavite da je u tipičnoj pločici debljina slojeva gvanina d_g=74nm, a citoplazme d_c=100nm. Promatrajte refleksiju svjetlosti na prvih pet graničnih ploha kod jedne pločice! Na svakoj plohi dio svjetlosti prolazi a dio se reflektira. Pretpostavite da je ljudskom oku vidljiva svjetlost valnih duljina 400nm-800nm!

v
g
c
g
c
g

a) Za svjetlost koja okomito upada na pločicu izračunajte valnu duljinu unutar vidljivog dijela spektra (koju bi ta svjetlost imala u vakuumu) za koju će reflektirane zrake sa promatranih slojeva biti približno u fazi! Ako bijela svjetlost upada na takvu pločicu, koja boja će se najjače reflektirati? Inače, površina ribe ima mnogo pločica u kojima su različite debljine slojeva, tako da se sva vidljiva svjetlost jako dobro reflektira.
b) Boja svjetlosti koja se najintenzivnije reflektira ovisi o kutu njenog upada. Izračunajte za koje valne duljine (vakuumske vrijednosti) će se pojaviti maksimumi u reflektiranoj svjetlosti ako bijela svjetlost upada pod kutom 30° s obzirom na okomicu pločice. Inače, pločice su kod ribe usmjerene u mnogim smjerovima, tako da se u određenom smjeru pojavljuju refleksije mnogih valnih duljina.

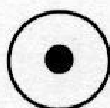
Zadatak 2 (18 bodova)



Atomi razrijeđenog plina mogu se usporavati pomoću laserske svjetlosti. Energija fotona iz snopa podesi se na nešto nižu vrijednost od energije potrebne za pobuđivanje atoma iz osnovnog stanja u prvo pobuđeno stanje. Tada atom koji se giba ususret fotonu može apsorbirati takav foton, a rezultat je njegovo usporavanje. Nakon toga dolazi do emisije fotona i povratka atoma u svoje osnovno stanje te gibanja u nekom drugom smjeru. Budući da se atomi u plinu gibaju u svim smjerovima, koristi se više laserskih snopova u različitim smjerovima da bi se sve komponente brzine umanjile te tako dobio plin čiji se atomi gibaju znatno umanjenom brzinom.
Promatrajte atome natrija mase $m=3{,}82\cdot10^{-26}$kg, kod kojih je energija prvog pobuđenog stanja $E=3{,}36\cdot10^{-19}$J iznad osnovnog stanja, a širina tog stanja je $\Gamma=7\cdot10^{-27}$J, što znači da energija može biti u intervalu od $E-\Gamma/2$ do $E+\Gamma/2$. Pri temperaturi 2,3K karakteristična brzina natrijevih atoma u plinu je 50m/s. Pretpostavite da se atom te brzine giba prema snopu svjetlosti.

a) Kolika mora biti frekvencija svjetlosti i njena valna duljina da bi atom apsorbirao foton?
b) Kolika će biti promjena brzine atoma apsorpcijom fotona?
c) U kojem intervalu mogu biti brzine atoma da bi oni mogli apsorbirati fotone izračunate energije?

Zadatak 3 (17 bodova)



Kugla polumjera r i temperature T_0 okružena je tankim sfernim štitom polumjera R tako da im se središta poklapaju. Temperatura izvan štita vrlo je mala u usporedbi s temperaturama kugle i štita. Pretpostavite da se toplina između kugle, štita i okoline prenosi jedino zračenjem! Intenzitet zračenja sa površine crnog tijela je $I=\Delta P/\Delta S=\sigma \cdot T^4$, gdje je T temperatura te površine, a σ Stefan-Boltzmannova konstanta. Sve površine štita i kugle zrače kao crno tijelo. Također, sve površine štita i kugle apsorbiraju zračenje kao crno tijelo. Pretpostavite da se T_0 održava konstantnom pomoću izvora topline u kugli!

a) Kolika je temperatura štita u termodinamičkoj ravnoteži?
b) Za koliki faktor štit smanjuje brzinu gubitka topline kugle s obzirom na onu kad štita ne bi bilo?

Zadatak 4 (17 bodova)

Nedavno je uočeno da se neutron ($m_n=1,675\cdot 10^{-27}$kg) iznad zrcala u gravitacijskom polju Zemlje može nalaziti samo na određenim visinama, slično kao što elektron u atomu može imati samo određene energije. Eksperiment je urađen tako da se snop vrlo sporih neutrona ispusti u horizontalnom smjeru iznad posebnog zrcala, te se oni gibaju u konstantnom gravitacijskom polju Zemlje (vertikalno ubrzanje $g=9,81$m/s^2) elastično se odbijajući od zrcala. Pretpostavite da u horizontalnom smjeru na neutrone ne djeluje nikakva sila! Iznad zrcala postavljen je detektor koji bilježi pojavljivanje neutrona u ovisnosti o visini. Uočeno je da detektor daje pozitivan signal samo ako je postavljen na određene visine, dok između tih visina detektor ne bilježi prisutnost neutrona. To je navelo na zaključak da su visine nalaska neutrona iznad zrcala »kvantizirane«, to jest da je on sa znatnom vjerojatnošću samo na određenim visinama.



a) Napišite izraz za mehaničku energiju neutrona koji se giba na opisani način te istaknite konstantne članove i one koji se mijenjaju!
b) Koristeći Heisenbergovo načelo neodređenosti za vertikalni smjer odredite najmanju visinu iznad pločice na kojoj će neutron biti detektiran, to jest visinu ispod koje se on ne bi smio nalaziti! Pođite od činjenice da će na toj visini neutron imati najmanju dopuštenu ukupnu energiju! Kolikoj gravitacijskoj potencijalnoj energiji odgovara izračunata visina u ovom slučaju?
c) Što načelo neodređenosti govori o gibanju u horizontalnom smjeru i kakva je posljedica toga na minimalnu energiju?

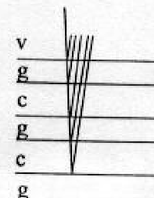
Napomena: funkcija $f(x)=x+a/x^2$ uz $a>0$ postiže svoju najmanju vrijednost za $x^3=2a$.

Konstante:
brzina svjetlosti: $c=3\cdot 10^8$m/s
Planckova konstanta: $h=6,626\cdot 10^{-34}$Js
naboj elektrona: $e=-1,6\cdot 10^{-19}$C

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE 2002.
RJEŠENJA ZADATAKA -4. grupe

Zadatak 1 (18 bodova)

a) Zraka svjetlosti upada okomito na površinu pločice i na svakoj se graničnoj plohi dio reflektira, a dio prolazi. Na slici je prikazano prvih 5 zraka koje su reflektirane (trebale bi biti okomite na plohe), te ih označimo redom 1,2,3,4,5 slijeva udesno.**(1b)**

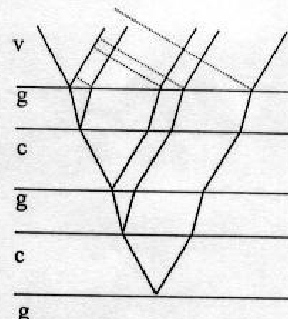


Pri refleksiji na sredstvu većeg indeksa loma nego što je onaj odakle zraka dolazi dodaje se optičkom putu zrake $\lambda/2$.**(1b)** Uzimajući da je $n_g=1,8$ i $d_g=74$nm, te $n_c=1,33$ i $d_c=100$nm, ispada $n_gd_g=133,2$nm i $n_cd_c=133$nm, pa uzmimo za te veličine 133nm. Razlike optičkih putova između zraka moraju za njihovu konstruktivnu interferenciju biti cjelobrojni višekratnici valne duljine:**(1b)**

$\delta_{12}=2n_gd_g-\lambda/2=k_1\lambda$, to jest $266\text{nm}=(k_1+1/2)\lambda$,
$\delta_{23}=2n_cd_c+\lambda/2=k_2\lambda$, to jest $266\text{nm}=(k_2-1/2)\lambda$,
$\delta_{34}=\delta_{12}$ i $\delta_{45}=\delta_{23}$, što daje iste uvjete kao prethodna dva izraza.**(1b)** Zatim:
$\delta_{13}=2n_gd_g+2n_cd_c+0=k_3\lambda$, to jest $532\text{nm}=k_3\lambda$, a $\delta_{24}=\delta_{13}=\delta_{35}$ daje isto.**(1b)** Dalje:
$\delta_{14}=4n_gd_g+2n_cd_c-\lambda/2=k_4\lambda$, to jest $798\text{nm}=(k_4+1/2)\lambda$,
$\delta_{25}=2n_gd_g+4n_cd_c+\lambda/2=k_5\lambda$, to jest $798\text{nm}=(k_5-1/2)\lambda$ **(1b)** i naposljetku:
$\delta_{15}=4n_gd_g+4n_cd_c=k_6\lambda$, to jest $1064\text{nm}=k_6\lambda$.**(1b)**

Od svih mogućih izbora cijelih brojeva k_i za valnu duljinu određenu gornjim uvjetima koja spada u vidljivi dio spektra dobije se $\lambda=532$nm. Znači, najintenzivnije se reflektira zelena boja.**(1b)**

b) Kad svjetlost upada iz vode pod kutom α s obzirom na okomicu, ona u gvanin ulazi pod kutom β danim izrazom $n_g\sin\beta=n_c\sin\alpha$, to jest $\beta=21,7°$.**(1b)** U citoplazmi je kut opet jednak $\alpha=30°$ jer je indeks loma isti kao i kod vode. Kut između okomice i svih zraka u gvaninu je β, a u citoplazmi α.**(1b)**



Put zrake unutar sloja je $d_g/\cos\beta$ ili $d_c/\cos\alpha$. No, jedna od zraka koje interferiraju prelazi određeni put u vodi koji druga zraka ne prelazi, a taj iznosi $l\sin\alpha$ (koji treba množiti sa $n_v=n_c$), gdje je l udaljenost točaka na površini pločice gdje izlaze zrake. l može biti $2d_g\text{tg}\beta$ ili $2d_c\text{tg}\alpha$ ili njihovi zbrojevi, ovisno o tome koje zrake uspoređujemo.**(2b)**

Pri refleksiji zrake na gušćem sredstvu dodaje se u optičkom putu $\lambda/2$.

Izračunavanjem razlike optičkih putova među različitim zrakama uz uvjet za konstruktivnu interferenciju dobiju se valne duljine (potrebno je koristiti $n_g\sin\beta=n_c\sin\alpha$ i $\sin^2x+\cos^2x=1$):

$\delta_{12}=2n_gd_g/\cos\beta-2n_cd_g\text{tg}\beta\sin\alpha-\lambda/2=2n_gd_g\cos\beta-\lambda/2=k_1\lambda$, što za $k_1=0$ daje $\lambda=494,3$nm,**(1b)**
$\delta_{23}=2n_cd_c/\cos\alpha+\lambda/2-2n_cd_c\text{tg}\alpha\sin\alpha=2n_cd_c\cos\alpha+\lambda/2=k_2\lambda$, što za $k_2=1$ daje $\lambda=460,7$nm,**(1b)**
$\delta_{34}=\delta_{12}$ i $\delta_{45}=\delta_{23}$, što daje iste valne duljine. Zatim:
$\delta_{13}=2n_gd_g/\cos\beta+2n_cd_c/\cos\alpha+0-2n_cd_g\text{tg}\beta\sin\alpha-2n_cd_c\text{tg}\alpha\sin\alpha=2n_gd_g\cos\beta+2n_cd_c\cos\alpha=k_3\lambda$, što za $k_3=1$ daje $\lambda=477,5$nm, a δ_{24} i δ_{35} daju isto.**(1b)** Dalje:
$\delta_{14}=4n_gd_g/\cos\beta+2n_cd_c/\cos\alpha-\lambda/2-4n_cd_g\text{tg}\beta\sin\alpha-2n_cd_c\text{tg}\alpha\sin\alpha=4n_gd_g\cos\beta+2n_cd_c\cos\alpha-\lambda/2=k_4\lambda$, što za $k_4=1$ daje $\lambda=483,1$nm,**(1b)**
$\delta_{25}=2n_gd_g/\cos\beta+4n_cd_c/\cos\alpha+\lambda/2-4n_cd_c\text{tg}\alpha\sin\alpha-2n_cd_g\text{tg}\beta\sin\alpha=2n_gd_g\cos\beta+4n_cd_c\cos\alpha+\lambda/2=k_5\lambda$, što za $k_5=2$ daje $\lambda=471,9$nm **(1b)** i naposljetku:
$\delta_{15}=4n_gd_g/\cos\beta+4n_cd_c/\cos\alpha-4n_cd_c\text{tg}\alpha\sin\alpha-4n_cd_g\text{tg}\beta\sin\alpha=4n_gd_g\cos\beta+4n_cd_c\cos\alpha=k_6\lambda$, što za $k_6=2$ daje $\lambda=477,5$nm.**(1b)**

Sve ove valne duljine javljaju se kao najintenzivnije nakon opisane refleksije.

Zadatak 2 (18 bodova)

a) Atom mase m prije apsorpcije giba se brzinom v ususret fotonu valne duljine λ. Nakon apsorpcije količina gibanja atoma smanjena je na $mv'=mv-h/\lambda$, to jest brzina je smanjena za $\Delta v=-hf/mc$. **(2b)** Očuvanje energije glasi: $hf+mv^2/2=E+mv'^2/2$, gdje je E razlika energija prvog pobuđenog stanja i osnovnog stanja. **(2b)** Dio energije fotona potroši se za pobuđivanje atoma, a dio na njegovo usporavanje. Uvrštavanjem v' iz prve u drugu jednadžbu dobije se $hf(1+v/c)=E+h^2f^2/2mc^2$. **(1b)** Napišimo rješenje ove jednadžbe u obliku $hf=E/(1+v/c-hf/2mc^2)$. **(1b)** Zanemarimo $hf/2mc^2$, te za $v<<c$ **(1b)** dobijemo $hf=E(1-v/c)=3{,}36\cdot10^{-19}(1-50/300000000)$J, to jest frekvencija je $5{,}071\cdot10^{14}$Hz$-8{,}5\cdot10^{7}$Hz. **(1b)** Znači, energija fotona mora biti nešto malo niža od E. Sad vidimo da smo s pravom zanemarili $hf/2mc^2=4{,}9\cdot10^{-11}$ što je puno manje od v/c pa neznatno pridonosi promjeni rješenja. Valna duljina potrebnog fotona je 591,6nm, to jest malo viša od toga (uvećana za dio od oko 10^{-7} od toga). **(1b)**

b) Smanjenje količine gibanja atoma jednako je količini gibanja apsorbiranog fotona, pa je $\Delta v=-hf/mc=-0{,}029$m/s. **(3b)**

c) Iz dobivenog izraza $hf(1+v/c)=E$ treba naći u kojem intervalu smije biti brzina atoma, **(1b)** ako je energija prvog pobuđenog stanja u intervalu Γ. Slijedi da je $hfv_i/c=\Gamma$, **(2b)** iz čega se dobije širina intervala brzine $v_i=c\Gamma/hf=6{,}25$m/s. **(2b)** Smanjenje brzine pri apsorpciji puno je manje od intervala u kojem smije biti brzina da bi apsorpcija bila moguća, što govori da će isti atom moći mnogo puta apsorbirati foton te se tako znatno usporiti. **(1b)**

Zadatak 3 (17 bodova)

Korištene su oznake iz teksta zadatka.

Kad ne bi bilo štita, kugla bi zračila u okolinu snagu $P_0=4\pi r^2\sigma T_0^4$. **(2b)**

Kad je štit u termodinamičkoj ravnoteži s kuglom, snaga koju štit dobiva od kugle mora biti jednaka snazi koju štit zrači prema van (inače bi se grijao ili hladio). **(2b)** Snaga koju štit zrači prema van iznosi $P_v=4\pi R^2\sigma T_1^4$. **(2b)** A kugla daje štitu onoliko koliko zrači umanjeno za onoliko koliko joj štit vraća, **(2b)** to jest: $P_0-4\pi r^2\sigma T_1^4$. **(2b)**

a) Izjednačavanjem se dobije $4\pi r^2\sigma T_0^4-4\pi r^2\sigma T_1^4=4\pi R^2\sigma T_1^4$, **(2b)** iz čega slijedi $T_1^4=T_0^4r^2/(r^2+R^2)$. **(1b)**

b) Kugla gubi snagu: $4\pi r^2\sigma T_0^4-4\pi r^2\sigma T_1^4=4\pi r^2\sigma T_0^4(1-r^2/(r^2+R^2))=4\pi r^2\sigma T_0^4R^2/(r^2+R^2)$. **(2b)** To znači da štit smanjuje gubitak snage na $P_0R^2/(R^2+r^2)$. **(2b)**

Zadatak 4 (17 bodova)

a) Mehanička energija gibanja neutrona je $E=m_ngz+m_nv_z^2/2+m_nv_x^2/2$, gdje je z visina na kojoj je neutron iznad zrcala, v_z komponenta brzine neutrona u vertikalnom smjeru i v_x horizontalna komponenta brzine.**(1b)** v_x je konstantna jer nema nikakvih sila u horizontalnom smjeru.**(1b)** Budući da je energija očuvana, onda je i $m_ngz+m_nv_z^2/2$ konstantno.**(1b)**

b) Polazimo od toga da je energija minimalna, što znači da je $E_z=m_ngz+p_z^2/2m_n$ minimalno. **(1b)** Smanjujući visinu z smanjujemo i njenu neodređenost Δz, ali time se povećava neodređenost Δp_z, što znači da i p_z mora biti veći.**(1b)** Dakle, za određeni z, E_z postiže najmanju vrijednost.**(1b)** Neodređenosti su vezane po Heisenbergovu načelu $\Delta z\cdot\Delta p_z\geq\hbar$.**(1b)** Uzmimo da z i p_z poprimaju najmanje vrijednosti, a to su barem Δz i Δp_z. **(1b)** Tada je $E_z=m_ng\Delta z+\hbar^2/(2m_n(\Delta z)^2)$.**(1b)** Iz ovog izraza potrebno je pronaći Δz za koji je $E_z=m_ng(\Delta z+\hbar^2/(2gm_n^2(\Delta z)^2))$ minimalno.**(1b)** Prema napomeni zadatka, izraz u zagradi je minimalan za $\Delta z=[\hbar^2/(gm_n^2)]^{1/3}$.**(2b)** Uvrštavanjem se dobije 7,39μm.**(1b)** Pripadna potencijalna energija je $1{,}2\cdot10^{-31}$J.**(1b)**

c) Načelo neodređenosti ne postavlja uvjet na horizontalnu komponentu brzine.**(1b)** Njena neodređenost može biti i po volji mala jer se neutron može nalaziti bilo gdje u x–smjeru.**(1b)** Što je sigurno, ono ne utječe na minimalnu visinu nalaska neutrona iznad zrcala.**(1b)**

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE 2003. - 4. grupa

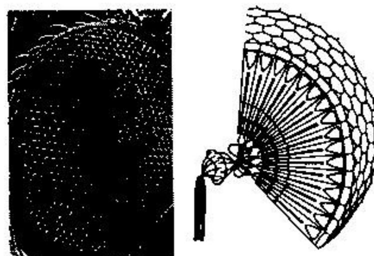
Zadatak 1 (20 bodova)

Mnoge zvijezde na nebu su dvojne zvijezde, iako ih takvima ne vidimo. Kod dvojnih zvijezda zapravo dvije zvijezde kruže oko njihova zajedničkog središta mase. Ako su im brzine gibanja dovoljno velike, one se mogu proučavati spektrometrijom. Promotrite najjednostavniji slučaj spektroskopske dvojne zvijezde koja se sastoji od dvije jednake zvijezde masa *m* kojima je polumjer kruženja *R*, a promatrač se nalazi u istoj ravnini u kojoj one kruže.

Zagrijani vodik u laboratoriju na Zemlji emitira svjetlost frekvencije $4{,}568110 \cdot 10^{14}$Hz. Svjetlost koja s dvojne zvijezde stiže na Zemlju između ostalih sadrži i komponentu čija se frekvencija mijenja između $4{,}567710 \cdot 10^{14}$Hz i $4{,}568910 \cdot 10^{14}$Hz. Odredite da li se ta dvojna zvijezda približava ili udaljava od Zemlje, kolikom brzinom, te kolike su brzine kruženja dviju zvijezda! Kolike su mase zvijezda i polumjer njihova kruženja ako se navedene granične frekvencije pojavljuju svakih 11 dana?

Brzina svjetlosti je $c=3 \cdot 10^8$m/s, a gravitacijska konstanta $G=6{,}67 \cdot 10^{-11}$Nm^2/kg^2.

Zadatak 2 (20 bodova)



Mnogi kukci imaju oko složeno od uskih dugih stožastih stanica *ommatidia*. Pogled na složeno oko pčele s prednje strane i shematski presjek složenog oka prikazani su na slikama. Svjetlost ulazi kroz prozirni djelić svake *ommatidie* na površini oka, a nastali podražaji vode se u središte oka. Pretpostavite da su *ommatidie* međusobno jednake. Polumjer oka (kugle) je r=3mm, širina *ommatidie* pri površini oka je d, a za valnu duljinu svjetlosti uzmite λ=400nm.

a) Svaka *ommatidia* prima svjetlost iz određenog smjera. Na temelju geometrijskih razmatranja napišite izraz za kutnu udaljenost (s obzirom na središte oka) dvaju vrlo sitnih predmeta koje će složeno oko vidjeti kao razdvojene, to jest svjetlost od njih će ulaziti u različite *ommatidie*! Komentirajte kako dakle vidna oštrina složenog oka ovisi o širini *ommatidie d*!

b) Promotrite zatim utjecaj difrakcije na širenje snopa svjetlosti. Koliki je kut pod kojim će se širiti snop svjetlosti valne duljine λ emitiran s kružne pločice promjera d? Koliki je stoga kut unutar kojeg će jedna *ommatidia* primati svjetlost zbog pojave difrakcije? Komentirajte kako taj kut ovisi o širini *ommatidie d*!

c) Izračunajte širinu *ommatidie d* za koju zbroj dvaju prethodnih efekata daje najbolju moguću kutnu razlučivost složenog oka! (Dobit ćete širinu *ommatidie* približno jednaku onoj izmjerenoj kod pčele.)

d) Na temelju dobivenih rezultata odredite na kojoj udaljenosti jedno od drugoga smiju biti zrnca maka koja su od pčele udaljena 1m da bi ih ona razlikovala?

Napomena: za malene kuteve koristite se izrazom $\sin\theta \approx \mathrm{tg}\theta \approx \theta$.

Zadatak 3 (14 bodova)

U medicini često koriste radioaktivni kobalt $^{60}Co_{27}$ čije je vrijeme poluraspada 5,27 godina, dok se u nuklearnoj bombi obično koristi uran $^{235}U_{92}$ s vremenom poluraspada $7{,}13 \cdot 10^8$ godina. Izračunajte omjer mase urana i mase kobalta koji u početnom trenutku imaju međusobno jednaku aktivnost! Nakon koliko vremena će omjer aktivnosti tih uzoraka biti jednak 100?

Zadatak 4 (16 bodova)

Mirujući mion raspada se na pozitron i dva neutrina (elektronski neutrino i mionski antineutrino):

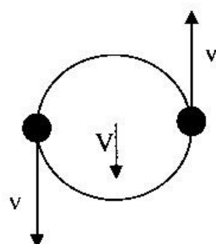
$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu .$$

Masa mirovanja miona je $106 MeV/c^2$, a pozitrona (kao i elektrona) $0{,}511 MeV/c^2$. Standardni model elementarnih čestica uzima da je masa elektronskog neutrina manja od $7 \cdot 10^{-6} MeV/c^2$, a masa mionskog neutrina manja od $0{,}3 MeV/c^2$, pa se u praktičnim računima mase neutrina gotovo uvijek zanemaruju u usporedbi s masama miona i elektrona. Stoga i vi pretpostavite da su mase neutrina jednake nuli!

Kolika je najveća moguća kinetička energija nastalog pozitrona? Argumentirano skicirajte za taj slučaj smjerove u kojima će odletjeti neutrini i pozitron!

Rješenja zadataka - 4. grupa

Zadatak 1 (20 bodova)



Kad se izvor svjetlosti približava promatraču brzinom v_1, frekvencija dolazne svjetlosti je: $f_1 = f\sqrt{\frac{c+v_1}{c-v_1}}$,

a kad se izvor udaljava od promatrača brzinom v_2, frekvencija je

$f_2 = f\sqrt{\frac{c-v_2}{c+v_2}}$, gdje je f=4,568110·10^{14}Hz. **2 boda**

Najveći Dopplerov pomak javlja se u trenutku kad se zvijezde gibaju baš direktno prema opažaču ili od njega, **1 bod**
kao što je prikazano na slici, **1 bod**
a frekvencije dolazne svjetlosti sa dviju zvijezda odgovaraju tada zadanim rubnim frekvencijama f_1=4,568910·10^{14}Hz i f_2= 4,567710·10^{14}Hz. **1 bod**

V je brzina gibanja središta mase dvojne zvijezde, a v su brzine kruženja svake zvijezde oko središta mase. U slučaju da je V>v, obje bi se zvijezde približavale promatraču (ako je V prema promatraču) ili bi se obje od njega udaljavale (ako je V od promatrača). **1 bod**
Tada bi Dopplerovi pomaci za obje zvijezde bili prema višoj frekvenciji ili za obje prema nižoj. To bi bilo u suprotnosti sa zadanim $f_1>f>f_2$. **1 bod**
Stoga mora biti V<v, to jest jedna se približava a druga udaljava od promatrača. **1 bod**
Uzmimo da je V prema promatraču. Brzina približavanja lijeve zvijezde je v_1=v+V, a brzina udaljavanja desne v_2=v-V. **1 bod**

Rješavanjem sustava jednadžbi $f_1 = f\sqrt{\frac{c+v+V}{c-v-V}}$ i $f_2 = f\sqrt{\frac{c-v+V}{c+v-V}}$ **1 bod**

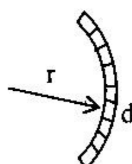
dobiju se $V = c\frac{f^2(f_1^2 - f_2^2)}{(f^2+f_1^2)(f^2+f_2^2)}$ i $v = c\frac{f_1^2 f_2^2 - f^4}{(f^2+f_1^2)(f^2+f_2^2)}$. **4 boda**

Dvojna zvijezda se približava Zemlji brzinom V=13,13km/s, a brzina kruženja zvijezda je v=39,4km/s. **1 bod**
Ako se pretpostavi da je V u suprotnom smjeru, dobije se V=-13,13km/s. **1 bod**
Rubne frekvencije se ponovno opaze kada zvijezde obiđu pola kružnice, pa je

$T = \frac{R\pi}{v}$, tj. $R = \frac{vT}{\pi}$ = 1,192·10^{10}m. **2 boda**

Iz $\frac{mv^2}{R} = G\frac{m^2}{(2R)^2}$ slijedi $m = \frac{4v^3T}{\pi G}$=1,108·10^{30}kg. **2 boda**

Zadatak 2 (20 bodova)



a) Svjetlost u jednu *ommatidiu* stiže iz kuta širine $\theta_g = \frac{d}{r}$
(budući da je $d \ll r$). **2 boda**
Ako su dva predmeta unutar tog kuta, oko ih neće moći

razlikovati jer signal tada nastaje samo unutar jedne *ommatidie*. Što je d manji, bolja je oštrina vida složenog oka. **2 boda**

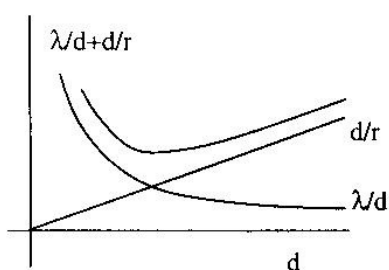
d

b) Zbog difrakcije snop svjetlosti će se širiti unutar kuta određenog uvjetom za minimum $d\sin\theta_d = \lambda$.

Zbog $d >> \lambda$, $\theta_d = \frac{\lambda}{d}$. **2 boda**

Dakle, *ommatidia* će primati svjetlost iz kuta širine $\theta_d = \frac{\lambda}{d}$. **1 bod**

Što je d manji, taj kut je veći, i slika koju stvara složeno oko zbog difrakcije je razmazanija. **2 boda**



c) Za zbroj tih dvaju efekata očito postoji optimalni d za koji je oštrina slike najbolja. Stoga tražimo minimum funkcije

$\theta_g + \theta_d = \frac{d}{r} + \frac{\lambda}{d}$, gdje je polumjer oka r=3mm, a valna duljina λ=400nm. **1 bod**

On se može naći isprobavanjem, grafički, ili izjednačavanjem derivacije s nulom. Minimum se dobije za $d = \sqrt{r\lambda} \approx 35\mu m$. **4 boda**

Za manji d prevladat će difrakcijsko razmazivanje, a za veći d smanjit će se geometrijska rezolucija. **2 boda**

d) Za d=35μm dobije se kutna razlučivost $\frac{\lambda}{d} = \frac{d}{r} = 0{,}011$. **2 boda**

Dakle, zrna maka moraju biti udaljena barem 1m·0,011=1,1cm da bi ih pčelinje oko razlikovalo. **2 boda**

Zadatak 3 (14 bodova)

Iz zakona radioaktivnog raspada $N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}$ **1 bod**

dobije se aktivnost $A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$, **1 bod**

a lako se pokaže $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$, gdje je $T_{1/2}$ vrijeme poluraspada, N_0 početni broj jezgara, N broj neraspadnutih jezgara u trenutku t. **2 boda**

Iz uvjeta da je u početnom trenutku aktivnost urana i kobalta jednaka $A_{Co}(0)=A_U(0)$

slijedi $\frac{N_{Co}}{T_{1/2}^{Co}} = \frac{N_U}{T_{1/2}^{U}}$. **1 bod**

Broj jezgara jednak je omjeru mase uzorka m i mase jedne jezgre M, pa je

$\frac{m_{Co}}{M_{Co}T_{1/2}^{Co}} = \frac{m_U}{M_U T_{1/2}^{U}}$. **1 bod**

Odatle je $\frac{m_U}{m_{Co}} = \frac{M_U T_{1/2}^{U}}{M_{Co}T_{1/2}^{Co}} = 5{,}3\cdot 10^8$, gdje se uzima M_U=235, a M_{Co}=60. **2 boda**

Omjer aktivnosti u ovisnosti o vremenu je

•

$$\frac{A_U}{A_{Co}}=\frac{A_U(0)2^{-\frac{t}{T_{1/2}^U}}}{A_{Co}(0)2^{-\frac{t}{T_{1/2}^{Co}}}}=\frac{2^{-\frac{t}{T_{1/2}^U}}}{2^{-\frac{t}{T_{1/2}^{Co}}}}=2^{t(\frac{1}{T_{1/2}^{Co}}-\frac{1}{T_{1/2}^U})}.$$ **3 boda**

Tražimo trenutak u kojem je taj omjer 100. Dobije se $t=6{,}64T_{1/2}^{Co}=35$godina. **3 boda**

Zadatak 4 (16 bodova)

Zakon očuvanja energije: $m_\mu c^2=m_e c^2+T_e+T_{\nu e}+T_{\nu\mu}$, gdje su $m_{\mu,e}$ mase mirovanja miona i pozitrona, a T kinetičke energije pozitrona i dvaju neutrina. **2 boda**

Zakon očuvanja količine gibanja: $0=\vec{p}_e+\vec{p}_{\nu e}+\vec{p}_{\nu\mu}$. **1 bod**

Najvećoj kinetičkoj energiji T_e odgovara i najveća količina gibanja p_e. **1 bod**

Da bi dva neutrina imala što veću ukupnu količinu gibanja u suprotnom smjeru od količine gibanja pozitrona, a da bi pritom na njih potrošena energija bila najmanja, oni moraju oba odletjeti u smjeru suprotnom od pozitrona. **4 boda**

Stoga je $p_e=p_{\nu e}+p_{\nu\mu}$. **1 bod**

Za neutrine kao čestice bez mase vrijedi: $T_{\nu e}=cp_{\nu e}$ i $T_{\nu\mu}=cp_{\nu\mu}$. **1 bod**

Slijedi $m_\mu c^2=E_e+(p_{\nu e}+p_{\nu\mu})c$, to jest $m_\mu c^2-E_e=p_e c$. **1 bod**

Korištenjem invarijantnosti $E_e^2-p_e^2c^2=m_e^2c^4$, **1 bod**

nakon uvrštavanja u kvadrirani prethodni izraz dobije se

$m_\mu^2c^4+m_e^2c^4=2m_\mu c^2E_e=2m_\mu c^2(T_e+m_ec^2)$. **1 bod**

Sređivanjem se dobije $T_e=\frac{(m_\mu-m_e)^2c^2}{2m_\mu}$. **2 boda**

Uvrštavanjem zadanih masa mirovanja $m_\mu=106\text{MeV}/c^2$ i $m_e=0{,}511\text{MeV}/c^2$ dobije se najveća moguća kinetička energija $T_e=52{,}5\text{MeV}/c^2$. **1 bod**

DRZAVNI SUSRET I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA

Mali Lošinj, 13.-16. svibnja 2004.

Srednje škole – 4. grupa

Zadatak 1 (18 bodova)

Žarišna daljina konvergentne leće može se određivati i na sljedeći način. Predmet i zastor postave se na stalnu međusobnu udaljenost d. Pomičući leću od predmeta prema zastoru pri određenom položaju leće (nazovite ga A) pojavit će se oštra slika predmeta na zastoru. Pomičući leću još prema zastoru ponovno će se pri drugom položaju (nazovite ga B) prikazati na zastoru također oštra slika predmeta. Zatim se izmjeri udaljenost l između položaja A i B. Kolika je žarišna daljina leće izražena preko d i l?
Obrazložite može li se na ovaj način određivati žarišna daljina divergentne leće?
Divergentnu leću stavi se neposredno uz konvergentnu leću poznate žarišne daljine 5cm te se one međusobno pričvrste tako da im se optičke osi podudaraju. Na gore opisani način odredi se žarišna daljina ove kombinacije dviju leća za koju je izmjereno d=80cm i l=60,5cm. Izračunajte žarišnu daljinu divergentne leće! U kakvom odnosu moraju biti žarišne daljine konvergentne i divergentne leće da bi ovakvo mjerenje bilo moguće?

Zadatak 2 (18 bodova)

U drugom svjetskom ratu koristili su radare načinjene od niza vertikalnih štapova pričvršćenih na tlo. Podnožja svih tih N antena nalaze se na istom pravcu, a susjedne antene međusobno su udaljene za d. Svaka od antena zrači elektromagnetske valove koherentno valnom duljinom λ jednoliko u svim smjerovima u horizontalnoj ravnini. Relativna faza δ između zračenja susjednih antena može se mijenjati elektroničkim putem. Za δ=0 zbog interferencije ovaj skup antena najjače zrači u smjeru okomitom na pravac na kojem su antene. Pokažite da je za $d<\lambda$ ovo jedini pravi maksimum!
Pod kojim kutem sustav zrači maksimalni intenzitet ako je $\delta \neq 0$? Tako se promjenom δ može mijenjati smjer snopa radarskog zračenja, dok antene miruju.
Meteorološki radar na avionu ima 15 antena na ukupnoj duljini 28cm i emitira radio valove frekvencije 8800MHz. Koje vrijednosti mora poprimati δ da bi radarski snop prebrisao kut 45° na lijevo i desno od pravca leta?

Zadatak 3 (14 bodova)

Da bi prosječno ljudsko oko zapazilo nekakav predmet, potrebno je da kroz zjenicu u njega ulazi 50 fotona u sekundi. Kolikom snagom krijesnica emitira svjetlost procesom bioluminiscencije ako ju prosječno ljudsko oko može opaziti s udaljenosti od najviše 30m? Emitirana svjetlost je zelene boje čija je valna duljina 532nm. Pretpostavite da krijesnica emitira svjetlost jednakim intenzitetom u svim smjerovima i da je svjetlost monokromatska!

Zadatak 4 (20 bodova)

Elektron određene kinetičke energije sudara se s mirujućim elektronom. Oba elektrona prežive sudar te još nastane i neutralni pion π^0. Kolika je granična kinetička energija gibajućeg elektrona potrebna za ovu reakciju? Kolika je brzina tog elektrona? Masa mirujućeg piona π^0 je 135MeV/c^2, a elektrona 0,911MeV/c^2.

DRŽAVNI SUSRET I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA

Mali Lošinj, 13.-16. svibnja 2004.

Srednje škole – 4. grupa - rješenja

Zadatak 1 (17 bodova)

Jednadžba za tanku leću je $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{d-x_1}=\frac{1}{f}$, gdje je x_1 udaljenost predmeta od leće, a d-x_1 udaljenost slike od leće, pri čemu su slika i predmet međusobno udaljeni za d. **(1 bod)**

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $x_1=\frac{d}{2}\pm\sqrt{\frac{d^2}{4}-fd}$. **(1 bod)**

Drugi položaj pri kojem se također javlja oštra slika određen je s x_2 za koji vrijedi ista jednadžba s istim rješenjima.

Stoga se položaji predmeta za koje se javljaju oštre slike razlikuju za $\sqrt{d^2-4fd}$, što je jednako izmjerenom l. Slijedi $f=\frac{d^2-l^2}{4d}$. **(2+1 bod)**

Žarišna daljina divergentne leće na ovaj se način ne može određivati jer se ne može uhvatiti realna slika na zastoru. **(3 boda)**

Žarištem kombinacije dviju leća prolazit će one zrake koje dolaze iz beskonačnosti i lome se kroz leće. Iz jednadžbe za prvu (konvergentnu) leću $\frac{1}{f}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1'}$, uz udaljenost predmeta od leće $x_1\to\infty$ dobije se udaljenost slike od leće $x_1'=f$. **(1 bod)**

Ta slika je predmet za divergentnu leću čiji je položaj s obzirom na leću $x_2=-(x_1'-D)=-(f-D)$, gdje je D razmak leća. **(2 boda)**

Iz jednadžbe druge (divergentne) leće žarišne daljine f': $-\frac{1}{|f'|}=\frac{1}{D-f}+\frac{1}{x_2'}$ gdje je x_2' položaj gdje nastaje konačna slika, dobije se žarišna daljina sustava

$$F=x_2'=\frac{(f-D)|f'|}{|f'|-f+D}.$$ **(2 boda)**

Za $D \ll f, |f'|$ je $F=\frac{f\cdot|f'|}{|f'|-f}$, iz čega slijedi $-\frac{1}{|f'|}=\frac{1}{F}-\frac{1}{f}$. **(1 bod)**

Uz f=5cm i $F=\frac{(80\text{cm})^2-(60{,}5\text{cm})^2}{4\cdot 80\text{cm}}=8{,}56\text{cm}$ dobije se $|f'|$=12cm. **(2 boda)**

Da bi ovakvo mjerenje bilo moguće, mora biti $|f'|>|f|$ **(1 bod)**

Zadatak 2 (17 bodova)



Slika **(1 bod)** Zrake pod kutem θ interferirat će konstruktivno za

$d\sin\theta-\frac{\delta}{2\pi}\lambda=k\lambda$, gdje je d razmak među susjednim antenama, δ razlika faze susjednih antena, a $k\lambda$ cjelobrojni višekratnik valne duljine. **(3 boda)**

Radarski snop imat će maksimum pod kutem $\sin\theta=\frac{k\lambda}{d}+\frac{\delta\lambda}{2\pi d}$.

Za $\delta = 0$ uz $d<\lambda$ jedino rješenje dobije se za $k = 0$ i ono iznosi $\sin\theta = 0$.
(Za općeniti δ potrebno je namjestiti k tako da je $|\sin\theta| \leq 1$.) **(3 boda)**

Za $k = 0$ kut maksimuma je $\theta = \arcsin\frac{\delta\lambda}{2\pi d}$. **(3 boda)**

Uz zadano $f=8{,}8\cdot10^9$Hz, $\lambda = \frac{c}{f} = 3{,}41\text{cm}$ i $d = \frac{28\text{cm}}{14} = 2\text{cm}$, maksimum pod kutem $\theta =$ 45° dobije se za $\delta = \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta = 2{,}6\text{rad}$. **(2+4 boda)**

Da bi se prebrisalo kut θ od -45° do 45° stupnjeva, faza δ mora se mijenjati od -2,6rad do 2,6rad. **(1 bod)**

Zadatak 3 (14 bodova)

U oko promatrača upada snaga $\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{hc}{\lambda}\cdot\frac{\Delta N}{\Delta t}$, gdje je ΔN broj fotona koji uđu kroz zjenicu u vremenskom intervalu Δt, a hc/λ energija jednog fotona. **(5 bodova)**

Budući da krijesnica zrači jednoliko u svim smjerovima, u oko upada $\frac{r^2\pi}{4d^2\pi}$ od ukupne snage zračenja, gdje je r polumjer zjenice, a d udaljenost oka od krijesnice. **(4 boda)**

Tako je ukupna snaga zračenja krijesnice jednaka $P = \frac{4d^2hc\Delta N}{r^2\lambda\Delta t} = 7{,}5\text{nW}$. **(5 bodova)**

Zadatak 4 (20 bodova)

Energija je očuvana: $E_1 + E_2 = E_1' + E_2' + E_\pi'$, gdje 1 označava gibajući elektron i 2 mirujući, a nakon sudara π označava novonastali pion. **(1 bod)**

Uvrštavanjem ukupne energije $E = K + mc^2$, **(1 bod)**
gdje je K kinetička, a mc^2 energije mirovanja, nakon sređivanja dobije se
$K = K_1' + K_2' + K_\pi + m_\pi c^2$. **(1 bod)**

Količina gibanja je očuvana: $p_1 + p_2 = p_1' + p_2' + p_\pi'$. **(1 bod)**

Najprikladnije je događaj promatrati u sustavu središta mase, gdje je očigledno da je najmanja kinetička energija sustava ona kad se sve tri čestice nakon sudara gibaju zajedno. Tada je i uložena kinetička energija najmanja. **(2+1 boda)**

Zakon očuvanja energije tada glasi $K = K' + m_\pi c^2$, **(2 boda)**
gdje je K ukupna početna kinetička energija, a K' ukupna konačna kinetička energija.

Lako se pokaže veza količine gibanja i kinetičke energije $p^2c^2 = K^2 + 2mc^2K$. **(2 boda)**
čime očuvanje ukupne količine gibanja $p = p'$ **(1 bod)**
dobiva oblik $K^2 + 2m_ec^2K = K'^2 + 2(2m_e + m_\pi)c^2K'$ **(1 bod)**

Nakon uvrštavanja $K' = K - m_\pi c^2$ i sređivanja dobije se

$$K = \frac{m_\pi^2c^2}{2m_e} + 2m_\pi c^2 = 18{,}1\text{GeV}.$$ **(3 boda)**

Iz $K + m_ec^2 = \frac{m_ec^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ **(2 boda)**

slijedi $\frac{v}{c} = \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{(1+\frac{K}{m_ec^2})^2}} \approx 1 - 4\cdot10^{-10}$, što znači da je v gotovo isto kao c. **(2 boda)**

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA .

Gospić, 12.-15. svibnja 2005.

Srednje škole - 4. grupa

Zadatak 1. (16 bodova)

Staklena boca unutarnjeg polumjera r i vanjskog polumjera R napunjena je mlijekom. Indeks loma stakla je n_s, a mlijeka n_m. Koji odnos mora vrijediti između r i R da bi gledajući sa strane boca izgledala kao da je staklo debljine nula, to jest da se čini kao da mlijeko zauzima prostor od lijevog do desnog vanjskog ruba boce? Promotrite slučajeve $n_s > n_m$ i $n_s < n_m$!

Zadatak 2. (22 boda)

Različiti izotopi istog elementa emitiraju svjetlost različitih valnih duljina. Jedna od valnih duljina u emisijskom spektru vodikova atoma je 656,45nm, a za deuterij valna duljina istog prijelaza je 656,27nm.

Koliko je zareza na rešetki potrebno da bi se ove dvije valne duljine razlučile u drugom redu difrakcije? Kao kriterij razlučivosti uzmi da se maksimum jedne valne duljine poklapa s najbližim minimumom druge!

Ako rešetka ima 500 zareza po milimetru, izračunaj kuteve i kutni razmak maksimuma drugog reda difrakcije ovih valnih duljina! Kutni razmak izračunajte na precizniji način nego iz razlike kutova!

Na temelju Bohrova modela atoma objasni i računom potkrijepi zašto se ove valne duljine istog prijelaza kod vodika i deuterija ovoliko razlikuju!

Zadatak 3. (16 bodova)

Tipična nuklearna elektrana ima korisnost 1/3 i proizvodi električnu snagu 1000MW. Do fisije urana dolazi nakon što jezgra ^{235}U apsorbira spori neutron. Među fisijskim produktima pronađeno je preko 100 različitih nuklida. Napiši jednadžbu reakcije pri kojoj fisijom nastaje jezgra ^{140}Xe te osim druge jezgre nastaju i dva brza neutrona kinetičke energije 1MeV. Zanemarivši početnu brzinu apsorbiranog neutrona izračunaj energiju oslobođenu u jednoj reakciji! Masa jezgre ^{235}U je 235,043923u, jezgre ^{140}Xe 139,921636u, a masa druge nastale jezgre 93,915360u.

Nakon apsorpcije sporog neutrona (prije nego se dalje raspadne na navedeni način) jezgra ^{235}U se mijenja i postaje pobuđena. Kolika je energija pobuđenja novonastale jezgre ako je njena masa u osnovnom stanju 236,045562u i koja je to jezgra?

^{140}Xe nije stabilna jezgra, već se uzastopnim β^- rapadima prevodi do Ce. Napiši jednadžbe tih raspada! Nakon fisije svake jezgre ^{235}U oslobađa se još ukupno 15MeV pri nizu ovih β^- rapada. Dok je fisiju jezgara ^{235}U moguće kontrolirati i zaustaviti ubacivanjem kontrolnih šipki koje apsorbiraju neutrone, ove β^- raspade nije moguće zaustaviti. Kolika se snaga oslobađa u trenutku nakon zaustavljanja fisije urana? Nemogućnost odvođenja tolike snage bila je uzrokom havarije nuklearke *Otok tri milje* 1979. godine.

Kolika je godišnja potrošnja urana u tipičnoj nuklearnoj elektrani?

Zadatak 4. (16 bodova)

Za foton frekvencije ω_0 emitiran s površine zvijezde uočeno je da mu se frekvencija na vrlo velikoj udaljenosti od zvijezde promijeni za $\Delta\omega$. Kolika je masa zvijezde ako joj je polumjer R?

Objasni kako se može ustanoviti da je to promjena frekvencije baš određenog fotona, a ne da se pojavio neki drugi foton drugačije valne duljine!

Konstante: $u=1{,}6605402\cdot10^{-27}$kg, $e=1{,}6\cdot10^{-19}$C, $c=3\cdot10^{8}$m/s, $h=6{,}626\cdot10^{-34}$Js
$m_p=1{,}007276u$, $m_n=1{,}008665u$, $m_e=0{,}000548580u$

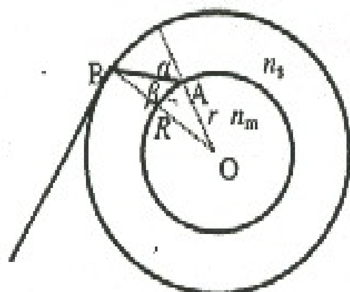
Prilog: periodni sustav elemenata

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Gospić, 12.-15. svibnja 2005.

Srednje škole - 4. grupa - rješenja

Zadatak 1. (16 bodova)

Da bi izgledalo kao da je debljina stakla nula, zraka svjetlosti koja dolazi iz mlijeka pri izlasku iz stakla u točki B mora do oka putovati kao tangenta s vanjskog ruba boce. **1bod**



Zbog cilindrične simetrije dovoljno je promatrati jednu zraku u ravnini okomitoj na os boce. Slika: **2boda**

Kut β jednak je kutu za koji se događa potpuna refleksija na granici staklo-zrak: $\sin\beta = \frac{1}{n_s}$. **2boda**

Sinusni teorem primijenjen na ΔABO daje: $\frac{r}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin(180^\circ - \alpha)}$,

pa je $\frac{r}{R} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$. **2boda**

Zraka koja dolazi iz mlijeka u točku A, otklanja se za maksimalni kut α_{max}. Traženi uvjet ostvaren je za

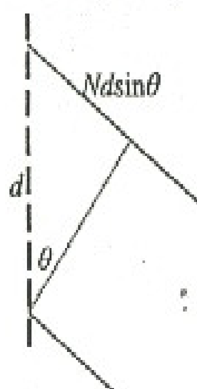
$\alpha \le \alpha_{max}$, to jest kada je $\frac{r}{R} \ge \frac{\frac{1}{n_s}}{\sin\alpha_{max}}$. **3boda**

α_{max} ovisi o indeksima loma n_s i n_m.

Za $n_m \le n_s$ je $\sin\alpha_{max} = \frac{n_m}{n_s}$ pa je $\frac{r}{R} \ge \frac{1}{n_m}$. **3boda**

Za $n_m \ge n_s$ je $\sin\alpha_{max} = 1$ pa je $\frac{r}{R} \ge \frac{1}{n_s}$. **3boda**

Zadatak 2. (22 boda)



Za konstruktivnu interferenciju zraka sa svih zareza uvjeti su:
$k\lambda_H = d\sin\theta_H$ i $k\lambda_D = d\sin\theta_D$. **1bod**

Da bi maksimum za jednu valnu duljinu pao u najbliži minimum druge, moraju se najveće razlike putova $Nd\sin\theta$ razlikovati barem za manju valnu duljinu: $Nd\sin\theta_H = Nd\sin\theta_D + \lambda_D$ **3boda**

gdje je N broj zareza, a d=1mm/500 razmak zareza.

Slika: **1bod**

Slijedi $Nk\lambda_H = Nk\lambda_D + \lambda_D$, to jest $Nk = \frac{\lambda_D}{\lambda_H - \lambda_D}$. **2boda**

Za k=2 je najmanji broj zareza N=1823. **1bod**

Kutevi pod kojima se javljaju maksimumi drugog reda zadanih valnih duljina dani su s

$\sin\theta_H = \frac{k\lambda_H}{d} = 0{,}65645$, pa je θ_H=41,02969° i **1bod**

Gospić, 12.-15. svibnja 2005.

$\sin\theta_D = \frac{k\lambda_D}{d} = 0,65627$, pa je pa je θ_D=41,01602°. **1bod**

Budući da su ovi kutevi bliski, njihovu razliku bolje je tražiti na način: $\frac{k}{d} = \frac{\Delta\sin\theta}{\Delta\lambda} = \frac{\cos\theta\Delta\theta}{\Delta\lambda}$ pa je

1bod

$\Delta\theta = \frac{k\Delta\lambda}{d\cos\theta_{usr}} = 2,3857\cdot10^{-4}\,\text{rad} = 0,01367° = 49,2''$ **2boda**

Za gibanje elektrona mase m_e i jezgre mase m_j oko mirujućeg središta mase po putanjama polumjera r_e i r_j vrijedi $m_e r_e = m_j r_j$ **1bod**

Centripetalna sila je elektrostatska: $\frac{mv_e^2}{r_e} = \frac{mv_j^2}{r_j} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, gdje je $r = r_e + r_j$. **1bod**

Ukupna kutna količina gibanja je $m_e v_e r_e + m_j v_j r_j = \frac{m_e m_j}{m_e + m_j}(v_e + v_j)r$. **1bod**

Bohrov model atoma pretpostavlja $mr_n v_n = n\frac{h}{2\pi}$, gdje smo uveli reduciranu masu $m = \frac{m_e m_j}{m_e + m_j}$ i indekse n koji označavaju stanje elektrona. **1bod**

Iz toga slijedi $r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2 n^2}{\pi m e^2}$ i $v_n = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 hn}$ pa je ukupna energija atoma u n-tom stanju $E_n = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2}$.

1bod

Valna duljina zračenja pri prijelazu iz n u m je $\lambda_{nm} = \frac{ch}{E_n - E_m} = \frac{8\varepsilon_0^2 ch^3}{me^4}\cdot\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)^{-1}$. **1bod**

Za vodik i deuterij sve je isto osim m.
Za $m_j = m_H = m_p = 1836,152 m_e$ je $m = 0,9994557 m_e$,
a za $m_j = m_D = m_p + m_n = 3674,835 m_e$ je $m = 0,999728 m_e$. **1bod**
Omjer reduciranih masa za atom deuterija i vodika je 1,000272, pa je omjer očekivanih valnih duljina istih prijelaza λ_{nm} kod vodika i deuterija u Bohrovom modelu također toliki.
Omjer zadanih valnih duljina je 1,000274 , što znači da Bohrov model dobro objašnjava razliku spektara vodika i deuterija. **2boda**
(Malo odstupanje posljedica je toga što je masa deuterona malo drugačija od $m_p + m_n$.)

Zadatak 3. (16 bodova)

Jednadžba fisije: ${}^{235}_{92}\text{U} + {}^{1}_{0}\text{n} \rightarrow {}^{140}_{54}\text{Xe} + {}^{94}_{38}\text{Sr} + 2\,{}^{1}_{0}\text{n}$ **1bod**

Oslobođena energija: $\Delta E = (m_U + m_n - m_{Xe} - m_{Sr} - 2m_n)c^2 = 2,96\cdot10^{-11}\,\text{J} = 185\,\text{MeV}$ **2boda**

Apsorpcija neutrona: ${}^{235}_{92}\text{U} + {}^{1}_{0}\text{n} \rightarrow {}^{236}_{92}\text{U}^*$, gdje * označava da je nastala pobuđena jezgra energije više od energije osnovnog stanja za iznos energije pobuđenja koja prema zakonu očuvanja energije iznosi $E^* = (m_{U235} + m_n - m_{U236})c^2 = 1,05\cdot10^{-12}\,\text{J} = 6,563\,\text{MeV}$, gdje su m_{U235} i m_{U236} mase nepobuđenih jezgara. **4boda**

Niz β^- raspada od Xe do Ce:



${}^{140}_{54}\text{Xe} \xrightarrow{\beta^-} {}^{140}_{55}\text{Cs} \xrightarrow{\beta^-} {}^{140}_{56}\text{Ba} \xrightarrow{\beta^-} {}^{140}_{57}\text{La} \xrightarrow{\beta^-} {}^{140}_{58}\text{Ce}$ **3boda**

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Gospić, 12.-15. svibnja 2005.

Odnos snage oslobođene β^- raspadima i ukupne oslobođene snage je $\frac{P_\beta}{P}=\frac{15\text{MeV}}{(15+185)\text{MeV}}$ gdje je 15MeV energija oslobođena u jednom nizu β^- raspada, a (15+185)MeV ukupna energija oslobođena fisijom jedne jezgre urana i β^- raspadima. **2boda**

Slijedi $P_\beta=\frac{15}{200}P=\frac{15}{200}\cdot 3000\text{MW}=225\text{MW}$, gdje je 3000MW izračunato iz proizvedene električne snage od 1000MW uz korisnost 1/3. **2boda**

Broj jezgara urana raspadnutih u godinu dana je $\frac{3000\text{MW}\cdot 1\text{god}}{200\text{MeV}}=2{,}96\cdot 10^{27}$ **1bod**

Masa tih jezgara je $2{,}96\cdot 10^{27}\cdot 235{,}0439u=1155\text{kg}$. **1bod**

Zadatak 4. (16 bodova)

Energija fotona emitiranog na površini planeta je $\hbar\omega_0$. Prema čestičnoj slici, njegova energija će se udaljavanjem od planeta smanjivati zbog gravitacijskog utjecaja. **2boda**

Zakon očuvanja energije je $\hbar\omega_0+\left(-\frac{GMm}{R}\right)=\hbar\omega+0$, gdje je član u zagradi potencijalna energija fotona pri površini planeta, a 0 na velikoj udaljenosti od njega, dok je $\hbar\omega$ energija fotona na velikoj udaljenosti od planeta. **3boda**

m je masa koja pripada fotonu energije E: $m=\frac{E}{c^2}=\frac{\hbar\omega_0}{c^2}$. **2boda**

Energija fotona se smanjuje pa uvodimo $\omega=\omega_0-\Delta\omega$. **1bod**

Uvrštavanjem zadnje dvije relacije u zakon očuvanja energije i sređivanjem dobije se masa planeta $M=\frac{c^2}{G}\cdot R\cdot\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$. **2boda**

Svakom atomu svojstven je određeni spektar zračenja. Svaka frekvencija iz spektra mijenja se proporcionalno početnoj frekvenciji: $\Delta\omega=\frac{MG}{c^2R}\omega_0$. Tako je cijeli frekvencijski spektar zračenja koje dolazi s udaljenog planeta "rastegnut" na odgovarajući način s obzirom na spektar istog atoma na Zemlji. **5bodova**

Mjerenje čitavih spektara, a ne samo jedne linije, može potvrditi provedeni račun. Preduvjet je da na udaljenom planetu postoje isti atomi (barem neki) kao i na Zemlji. **1bod**

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA, Vis, 11.-14. svibnja 2006.

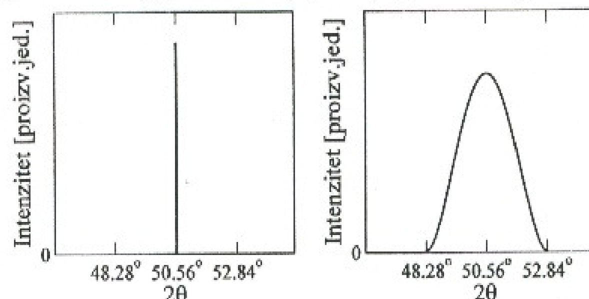
Srednje škole - 4. grupa

Zadatak 1 (18 bodova)

Monokristal bakra obasjava se rentgenskim zrakama valne duljine 154,05pm s ciljem određivanja razmaka među kristalnim ravninama. Uski paralelni snop zračenja dolazi iz fiksnog smjera, reflektira se na monokristalu koji se polagano okreće oko svoje osi, te potom detektor mjeri ovisnost intenziteta reflektiranog snopa o kutu skretanja zrake. Detektor bilježi jaki intenzitet kada je reflektirana zraka otklonjena za 50,56° od smjera dolaska upadne zrake.

a) Koliki je razmak među ravninama na kojima se događa ova Braggova refleksija, ako je poznato da je to najmanji kut pod kojim se ona događa?

b) Mjerenjem makroskopski velikih kristala ovisnost intenziteta o kutu skretanja vrlo je oštra funkcija prikazana na lijevoj slici. Za kristaliće nanometarskih dimenzija linija postaje proširena. Koristeći se desnom slikom približno izračunaj debljinu kristalića na kojem se promatra difrakcija. Uputa: minimumi s lijeve i desne strane posljedica su difrakcije na konačnom broju ravnina čije ste razmake već izračunali.

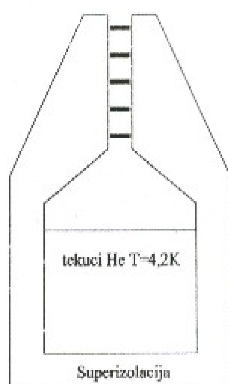


Zadatak 2 (17 bodova)

Kristal kvarca čiji su indeksi loma n_i=1,553 za izvanrednu zraku i n_r=1,544 za redovnu zraku oblikovan je kao tanka pločica debljine 0,12mm tako da mu je optička os paralelna s površinom pločice. Pločica se postavi između dva polarizatora međusobno okomitih osi polarizacije, a optička os pločice čini kut od 45° s osima polarizatora te su ravnine dvaju polarizatora i kvarcne pločice međusobno paralelne.

Koje valne duljine vidljive svjetlosti (400-750nm) će proći kroz sustav s najvećim intenzitetom?

Zadatak 3 (18 bodova)



Spremnik za tekući helij izoliran je takozvanim superizolatorom te je dotok topline iz okoline kroz njegove stijenke vrlo mali. Na vrhu spremnika nalazi se dugi otvor kružnog poprečnog presjeka promjera 4cm. Da bi se smanjio dovod topline zračenjem, u otvor se stavi pet razmaknutih kružnih poklopaca neznatno manjeg promjera. Poklopce, kao i površinu tekućeg helija i okolinu smatrajte crnim tijelima. Tekući helij je temperature 4,2K, a okolina je na 300K. Kolika je temperatura svakog poklopca? Koliko topline ulazi zračenjem kroz otvor preko tih pet poklopaca do tekućine, a koliko bi ulazilo kad poklopaca ne bi bilo? Koliko litara tekućeg helija bi isparavalo u oba slučaja u jednom danu, ako je poznata latentna toplina isparavanja od 20900J/kg i gustoća tekućeg helija od 0,125kg/L? Zanemarite vođenje topline i strujanje, a promatrajte samo zračenje. U stvarnosti tekućina će još brže isparavati.

Zadatak 4 (17 bodova)

Sudaranjem brzih elementarnih čestica s mirujućima mogu nastajati nove čestice. Dio kinetičke energije brze čestice može se pretvoriti u masu nove čestice. Sudarom protona s protonom mogu nastati pozitivan i negativan kaon: $p + p \rightarrow p + p + K^+ + K^-$. Energija mirovanja kaona je 493,7MeV, a protona 938,3MeV. Kolika je najmanja kinetička energija gibajućeg protona potrebna za tu reakciju? Koristite sustav koji vam se čini prikladnijim, no pazite na relativističke transformacije brzine!

Kolika je najmanja ukupna kinetička energija obaju protona potrebna za napisani proces u slučaju kad bi se oba protona gibala istom brzinom jedan prema drugom?

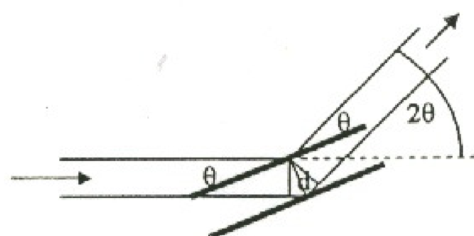
Usporedite obje izračunate najmanje kinetičke energije s energijom mirovanja kaona! Kakav biste ubrzivač protona stoga preporučili izgraditi?

Konstante: $e=1{,}6\cdot10^{-19}$C, $c=3\cdot10^8$ms^{-1}, $h=6{,}626\cdot10^{-34}$Js, $\sigma=5{,}67\cdot10^{-8}$Wm^{-2}K^{-4}

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Vis, 11.-14. svibnja 2006.

Srednje škole - 4. grupa - rješenja zadataka

Zadatak 1 (18 bodova)



a) Braggova jednadžba glasi $2d\sin\theta = k\lambda$, gdje je λ valna duljina zračenja, d je razmak među ravninama, a θ kut između upadne zrake i površine koji iznosi polovicu zadanog kuta skretanja. **(2 boda)**

Maksimum pod najmanjim kutem pojavit će se za k=1, pa je

$d = \dfrac{\lambda}{2\sin\theta} = 180{,}4\text{pm}$ **(3 boda)**

b) Za prvi maksimum je $2d\sin\theta = \lambda$. Pri istom kutu za ravnine razmaknute md je $2md\sin\theta = m\lambda$. Zrake reflektirane na svim ravninama stoga konstruktivno doprinose Braggovu maksimumu. **(2 boda)**
Neka je m ukupni broj razmaka među ravninama. Prvi minimum pri većem kutu θ_2=26,42° javlja se kada se zrake s prve i zadnje ravnine razlikuju dodatno za λ, tj. kada je $2md\sin\theta_2 = (m+1)\lambda$ jer će tada prva zraka sa zrakom reflektiranom na polovici debljine interferirati destruktivno budući da se razlikuju u putu za $\lambda/2$, a isto tako će destruktivno interferirati sve zrake iz gornje polovice kristala s pripadnom zrakom iz donje polovice. **(4 boda)**

Slično vrijedi i za manji kut θ_1=24,14°: $2md\sin\theta_1 = (m-1)\lambda$. **(1 bod)**

Oduzimanjem te dvije jednadžbe dobije se $2md(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) = 2\lambda$. **(1 bod)**

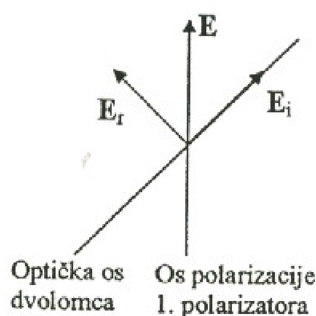
Za bliske kutove je $\sin\theta_2 - \sin\theta_1 = \dfrac{\Delta\sin\theta}{\Delta\theta}\cdot\Delta\theta = (\theta_2 - \theta_1)\cdot\cos\theta$. **(2 boda)**

Stoga je debljina (dimenzija) kristalića $D = md = \dfrac{\lambda}{(\theta_2 - \theta_1)\cos\theta}$ =4,3nm , **(3 boda)**

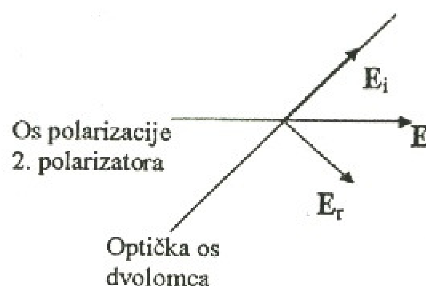
gdje je $\theta_2 - \theta_1$ =26,42°-24,14°=0,04rad.

Zadatak 2 (17 bodova)

Prije prolaska kroz dvolomac:



Poslije prolaska kroz dvolomac:



(2 boda)

Razlika faza koju steknu izvanredna (čije električno polje titra u smjeru optičke osi kristala) i redovna zraka (čije električno polje titra okomito na optičku os) svjetlosti valne duljine λ pri prolasku kroz pločicu dvolomca debljine d iznosi $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d \cdot (n_i - n_r)$, gdje su n_i i n_r indeksi loma za izvanrednu i redovnu zraku. **(3 boda)**

Nakon prolaska kroz prvi polarizator električno polje amplitude E titra samo u ravnini osi polarizatora, pa ima komponente $E_i = E/\sqrt{2}$ duž osi dvolomca i $E_r = E/\sqrt{2}$ okomito na tu os i njih dvije titraju u fazi. **(3 boda)**

Kroz drugi polarizator izlazi samo horizontalna komponenta polja. Ona će biti najveća ako titranja tih dviju komponenata prijeđu u protufazu, kada će se ravnina titranja polja u našem slučaju promijeniti za 90°. **(4 boda)**

To će biti ostvareno za $\Delta\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, \ldots$ **(2 boda)**

Slijedi $\lambda = \frac{2d}{k}(n_i - n_r)$, gdje je k neparni broj. **(1 bod)**

Vidljivom dijelu spektra odgovaraju $\lambda(k=3)$=720nm i $\lambda(k=5)$=432nm. **(2 boda)**

Zadatak 3 (18 bodova)

Snaga zračenja crnog tijela dana je Štefan-Boltzmannovim zakonom $P=\sigma AT^4$, gdje je $A = d^2\pi/4 =$ 0,001256m^2 površina tijela koje zrači, a T temperatura površine. **(1 bod)**
Isti zakon vrijedi i za primanje zračenja iz okoline ako se za T stavi temperatura okoline. **(1 bod)**

Prvi gornji poklopac temperature T_1 zrači energiju snagom σAT_1^4 prema gore i isto toliko prema dolje, a prima energiju od okoline temperature T_0=300K i drugog poklopca temperature T_2, pa je ukupna promjena njegove energije $\Delta Q_1/\Delta t = \sigma A(T_0^4 + T_2^4 - 2T_1^4)$. **(3 boda)**

Na isti način je $\Delta Q_2/\Delta t = \sigma A(T_1^4 + T_3^4 - 2T_2^4)$, $\Delta Q_3/\Delta t = \sigma A(T_2^4 + T_4^4 - 2T_3^4)$, $\Delta Q_4/\Delta t = \sigma A(T_3^4 + T_5^4 - 2T_4^4)$. Za donji peti poklopac je $\Delta Q_5/\Delta t = \sigma A(T_4^4 + T_{He}^4 - 2T_5^4)$, gdje je T_{He}=4,2K temperatura tekućeg helija. **(2 boda)**

U stacionarnom stanju su temperature svih poklopaca konstantne, pa je $\Delta Q_i/\Delta t = 0$ (i=1,2,3,4,5). **(1 bod)**

Slijede jednadžbe $2T_1^4 - T_2^4 = T_0^4$, $-T_1^4 + 2T_2^4 - T_3^4 = 0$, $-T_2^4 + 2T_3^4 - T_4^4 = 0$, $-T_3^4 + 2T_4^4 - T_5^4 = 0$ i $-T_4^4 + 2T_5^4 = T_{He}^4$. **(1 bod)**

Rješenje ovog sustava je $T_1^4 = \frac{1}{6}T_{He}^4 + \frac{5}{6}T_0^4$, $T_2^4 = \frac{1}{3}T_{He}^4 + \frac{2}{3}T_0^4$, $T_3^4 = \frac{1}{2}T_{He}^4 + \frac{1}{2}T_0^4$, $T_4^4 = \frac{2}{3}T_{He}^4 + \frac{1}{3}T_0^4$, $T_5^4 = \frac{5}{6}T_{He}^4 + \frac{1}{6}T_0^4$. **(3 boda)**

Temperature poklopaca su redom T_1=286,6K, T_2=271,1K, T_3=252,3K, T_4=228K, T_5=191,7K. **(1 bod)**

Helij prima toplinu samo od petog poklopca pa je
$\Delta Q_{He}/\Delta t = \sigma A(T_5^4 - T_{He}^4) = \sigma A(\frac{5}{6}T_{He}^4 + \frac{1}{6}T_0^4 - T_{He}^4) = \frac{1}{6}\sigma A(T_0^4 - T_{He}^4)$ =0,096J/s. **(2 boda)**

Kad ne bi bilo poklopaca, primljena toplina bi bila $\Delta Q_{He}/\Delta t = \sigma A(T_0^4 - T_{He}^4)$ =0,577J/s. **(1 bod)**

Uz te dovedene količine topline uzimajući za latentnu toplinu isparavanja helija L_i=20900J/kg isparilo bi ga $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{L_i \Delta t} = 4{,}6\cdot 10^{-6}$kg/s=0,4kg/dan u slučaju kad su stavljeni poklopci ili 2,4kg/dan kad ne bi bilo poklopaca, što odgovara volumenu tekućine od $\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\rho \Delta t}$ gdje je ρ=0,125kg/L gustoća tekućeg helija pa ispari 3,2L/dan s poklopcima ili 19,2L/dan bez poklopaca. **(1+1 bod)**

Zadatak 4 (17 bodova)

Gledano u sustavu središta mase, najmanja energija potrebna za stvaranje kaona bit će ako sve čestice nakon sudara miruju. **(1 bod)**

Brzinu tog sustava V s obzirom na laboratorijski moguće je odrediti iz brzine v jednog protona i mirovanja drugog protona. Brzina prvog u sustavu središta mase je $v_1' = \frac{v-V}{1-vV/c^2}$, a drugog $v_2' = \frac{0-V}{1-0}$. Zbog jednakosti masa mora biti $v_1' = -v_2'$, iz čega slijedi jedno fizikalno rješenje $V = \frac{c^2}{v}\left(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)$. **(3 boda)**

Zakon očuvanja energije u laboratorijskom sustavu u kojem se sve čestice nakon sudara gibaju zajedničkom brzinom V je $m_pc^2 + K_p + m_pc^2 = 2\frac{m_pc^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} + 2\frac{m_Kc^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$. **(2 boda)**

Za gibajući proton je $m_pc^2 + K_p = \frac{m_pc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ iz čega slijedi $\frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{m_pc^2}{m_pc^2+K_p}\right)^2}$. **(1 bod)**

Uvrštavanjem toga u izraz za V dobije se $\frac{V}{c} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2m_pc^2}{K_p}+1}}$, tj. $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{2m_pc^2}{2m_pc^2+K_p}}$. **(1 bod)**

Zakon očuvanja energije tada je zapisan $2m_pc^2 + K_p = 2\frac{m_pc^2 + m_Kc^2}{\sqrt{\frac{2m_pc^2}{2m_pc^2+K_p}}}$. **(2 boda)**

Rješavanjem se dobije $K_p = 4m_Kc^2 + 2\frac{m_K^2}{m_p}c^2 = 2m_Kc^2\left(2+\frac{m_K}{m_p}\right) = 2{,}526\cdot 2m_Kc^2 = 2494\text{MeV}$.

(2 boda)

Ako se protoni prije reakcije gibaju jedan prema drugom istim brzinama u laboratorijskom sustavu, onda je najmanju energiju potrebno uložiti ako poslije sudara sve čestice u tom sustavu miruju, pa je $2m_pc^2 + 2K_p = 2m_pc^2 + 2m_Kc^2$, tj $2K_p = 2m_Kc^2 = 987{,}4\text{MeV}$, što je jednako energiji mirovanja dvaju kaona. **(4 boda)**

U prvom slučaju potrebna kinetička energija je bila za faktor 2,526 veća. Energijski je povoljnije provoditi sudar u kojem se oba protona gibaju istim brzinama jedan prema drugome. **(1 bod)**

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA

Primošten, 10.-13. svibnja 2007.

Srednje škole – 4. grupa

1. zadatak (18 bodova)

Indeks loma atmosfere mijenja se s promjenom visine iznad Zemljine površine. Izvedite odnos između indeksa loma n na nekoj visini i kuta između zrake svjetlosti i vertikale na istoj visini.
Izvedite izraz za polumjer zakrivljenosti zrake svjetlosti koja se širi u horizontalnom smjeru u blizini Zemljine površine.
Koliki je polumjer zakrivljenosti zrake koja se širi horizontalno u blizini Zemljine površine ako je gradijent indeksa loma u vertikalnom smjeru $-3\cdot10^{-8}m^{-1}$, a indeks loma atmosfere tu iznosi 1,0003? Za koju vrijednost gradijenta bi zraka svjetlosti kružila oko Zemlje? Polumjer Zemlje je 6380km.
Koja bi se svojstva atmosfere trebala promijeniti da bi zraka ostala zarobljena u atmosferi Zemlje kao što je slučaj kod Venere?

2. zadatak (17 bodova)

Promotrite difrakcijsku rešetku s N jednoliko razmaknutih uskih pukotina međusobno udaljenih d na koju okomito upada svjetlost valne duljine λ. Kolika je kutna širina glavnih difrakcijskih maksimuma? Za to izračunajte kutne položaje minimuma s obiju strana od odabranog glavnog maksimuma koristeći se aproksimacijom malih kutova.
Dokažite i da je ovisnost širine maksimuma o N u skladu sa zakonom očuvanja energije!
Kolika je širina maksimuma prvog reda za rešetku koja ima 5000 pukotina međusobno udaljenih 1,2μm na koju upada svjetlost valne duljine 632nm?

3. zadatak (17 bodova)

Nuzprodukt procesa obogaćivanja urana je i takozvani osiromašeni uran koji sadrži 99,8% izotopa U-238, a osiromašenim se naziva jer je iz smjese izdvojen izotop U-235. Od tog materijala izrađuju zrna za protuoklopne metke čijom uporabom nakon rasprsnuća nastaje fina aerosolna prašina koja je posebno opasna kad uđe unutar organizma putem hrane, vode ili zraka, jer α-čestice nastale raspadom jezgre U-238 unutar organizma mogu prouzročiti nastanak raka, oštećenje živčanog sustava, reproduktivne probleme, itd. Vrijeme poluraspada izotopa U-238 je 4,51 milijarde godina.
Jedno zrno prilikom pogotka proizvede 950g radioaktivne prašine "osiromašenog urana". Ona se raširi sve do udaljenosti 100m od mjesta eksplozije, a pretpostavi da na tlo padne jednolikom koncentracijom. Pri padanju nakupi se i na jabuci promjera 10cm. Koliko se α-raspada dnevno dogodi u organizmu nakon pojedene spomenute jabuke? ($u=1{,}66\cdot10^{-27}$kg)
Za koliko godina će se radioaktivnost takve prašine u kontaminiranom području smanjiti na desetinu od početne radioaktivnosti?

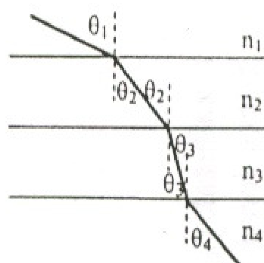
4. zadatak (18 bodova)

Za određivanje količine gibanja elektrona u čvrstim tvarima koristi se poništavanje (anihilacija) pozitrona s elektronom. Pozitron ima ista svojstva kao i elektron, osim što mu je naboj pozitivan. Pozitroni visoke energije nastali u radioaktivnim izvorima usmjere se na uzorak u kojem se unutar kratkog vremena uspore na vrlo malene brzine. Prije poništavanja količina gibanja pozitrona zanemariva je naspram količine gibanja elektrona u tvari. Najčešći je ishod poništavanja nastanak dva fotona bliskih energija koja izlijeću u skoro suprotnim smjerovima, a mjerenjem kuta za koji se ti smjerovi razlikuju od 180° izračunava se količina gibanja elektrona koji se poništio s pozitronom.
Kolika je količina gibanja i energija (u eV) vodljivog elektrona u litiju prije poništavanja za koje je izmjereno da se smjerovi izlaska fotona nastalih poništavanjem razlikuju za $4{,}29\cdot10^{-3}$rad od 180° te da im se energije razlikuju za 192eV? Masa elektrona: $9{,}11\cdot10^{-31}$kg, naboj elektrona: $-1{,}6\cdot10^{-19}$C, $c=3\cdot10^{8}$m/s.

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Primošten, 10.-13. svibnja 2007.

Srednje škole - 4. grupa - rješenja

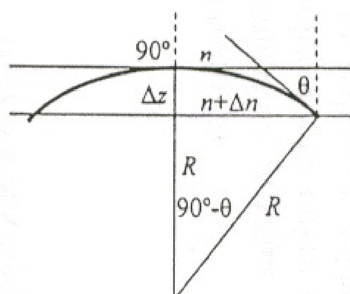
1. zadatak 1 (18 bodova)



Zakon loma pri prelasku iz područja u područje daje $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$, zatim $\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_3} = \frac{n_3}{n_2}$, pa $\frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_4} = \frac{n_4}{n_3}$ i tako dalje, što se može zapisati kao

$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 = n_3 \sin\theta_3 = n_4 \sin\theta_4 = ...$

Znači da vrijedi $n_z \sin\theta_z = konst.$ za bilo koju visinu z i kada se indeks loma mijenja kontinuirano. **(4 boda)**



Budući da se promatra horizontalna zraka, to je upadni kut između zrake i okomice na liniju konstantnog indeksa loma n pravi. **(1 bod)**

Kad se zraka spusti za Δz, indeks loma se poveća za iznos Δn. Stoga kut postane θ. Budući da indeks loma pada s porastom visine, zraka je zakrivljena prema dolje.

Gornja relacija daje $n\sin 90° = (n+\Delta n)\sin\theta$. **(3 boda)**

Geometrijom uočavamo $\Delta z = R - R\cos(90° - \theta) = R - R\sin\theta$

nakon čega slijedi $nR = nR - n\Delta z + R\Delta n - \Delta n\Delta z$. **(2 boda)**

Zanemarivanjem $\Delta n\Delta z$ slijedi $R = n\frac{\Delta z}{\Delta n} = \frac{n}{dn/dz}$. **(2 boda)**

Za zadani gradijent i indeks loma je R=3,33·10^{7}m. **(1 bod)**

Da bi zraka ostala kružiti oko Zemlje, trebao bi polumjer njene zakrivljenosti biti jednak polumjeru Zemlje $R=R_z$=6,38·10^{6}m, pa bi trebalo biti dn/dz=1,567·10^{-7}m^{-1}. **(2 boda)**

Budući da indeks loma, a time i njegov gradijent, ovisi o dielektričnoj konstanti zraka koja ovisi o koncentraciji, trebalo bi promijeniti volumnu koncentraciju molekula, ili masu molekula, ili tlak i temperaturu, a može i gravitacijsko ubrzanje pri Zemljinoj površini, dakle sve veličine koje utječu na gradijent koncentracije. **(3 boda)**

2. zadatak (17 bodova)

Glavni difrakcijski maksimum javlja se pod kutom danim jednadžbom $d\sin\theta = k\lambda$. **(2 boda)**

Tada je razlika putova dviju rubnih zraka s rešetke jednaka $Nd\sin\theta = Nk\lambda$. **(1 boda)**

Ako se ta razlika promijeni za $\pm\lambda$, pojavit će se minimum najbliži tom maksimumu jer će se zraci iz svake pukotine pojaviti zraka iz druge polovice rešetke s kojom će se poništiti zbog razlike puta od $\lambda/2$.

Tada je $Nd\sin(\theta \pm \Delta\theta) = Nk\lambda \pm \lambda$, gdje je $\Delta\theta$ kutni razmak od maksimuma do minimuma. **(2 boda)**

Zbog $\Delta\theta << 1$ je $\sin(\theta + \Delta\theta) \approx \sin\theta + \cos\theta \cdot \Delta\theta$. **(1 bod)**

Slijedi $Nd\cos\theta \cdot \Delta\theta = \pm\lambda$, pa je $\Delta\theta = \pm\frac{\lambda}{Nd\cos\theta}$. **(2 boda)**

Širina linije je $2\Delta\theta = \frac{2\lambda}{Nd\cos\theta}$ **(1 bod)**

Amplituda svakog maksimuma jednaka je zbroju amplituda valova iz svake pukotine, dakle proporcionalna je s N, pa je intenzitet maksimuma proporcionalan s N^2. Ukupni intenzitet propušten kroz rešetku proporcionalan je s N. Stoga bi širina linija trebala biti proporcionalna s N^{-1}da bi bila očuvana energija. To je dobiveno i računom. **(5 bodova)**

Za zadane veličine je $\cos\theta = \sqrt{1-\left(\frac{k\lambda}{d}\right)^2} = 0,85$ pa je $2\Delta\theta$=0,0002478, što je 51 kutnu sekundu.

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA

Primošten, 10.-13. svibnja 2007

(3 boda)

3. zadatak (17 bodova)

Masa radioaktivne prašine po jedinici površine na tlu je $\frac{m}{d^2\pi}$=0,03g/m^2. **(1 bod)**

Na jabuci se nakupi pri padanju $m_U = \frac{m}{d^2\pi}\cdot\left(\frac{2r}{2}\right)^2\pi$=0,235mg radioaktivne prašine. **(2 boda)**

Pojedenom jabukom unešeno je u organizam $N = m_U/238u$=5,95·10^{17} jezgara U-238. **(2 boda)**

Ovisnost broja neraspadnutih jezgara o vremenu je $N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$. **(1 bod)**

Aktivnost (broj raspada u jedinici vremena) je $A(t) = -\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(0)e^{-\lambda t} = \lambda N(t)$. **(2 boda)**

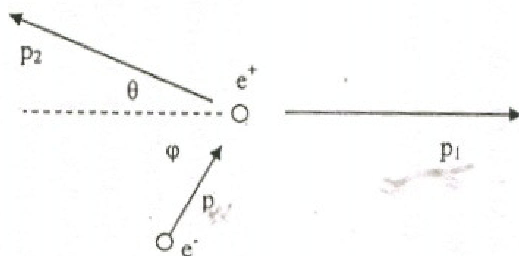
Konstanta raspada dobije se iz vremena poluraspada $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$=4,87·10^{-18}s^{-1}. **(2 boda)**

Zbog tako male konstante raspada teško je izračunati broj raspadnutih jezgara unutar jednog dana kao razliku broja neraspadnutih jezgara na početku dana i na kraju dana koji se razlikuju vrlo malo s obzirom na broj neraspadnutih jezgara, ali je zato tim valjanije računati broj raspadnutih jezgara kao $\Delta N = A\Delta t$ jer je aktivnost gotovo konstantna unutar jednog dana.

$\Delta N = A\Delta t = \lambda N\Delta t$ = 2,897s^{-1}·24h = 250 000 raspada u jednom danu. **(4 boda)**

Iz $A(t) = A(0)e^{-\lambda t}$ dobije se $t = \frac{\ln(A(0)/A(t))}{\lambda}$=4,73·10^{17}s=15 milijardi godina. **(3 boda)**

4. zadatak (18 bodova)



Na mirujući pozitron nalijeće elektron količine gibanja p te nakon poništavanja izlijeću dva fotona s količinama gibanja p_1 i p_2 kako je prikazano na slici. **(3 boda)**

Zakon očuvanja količine gibanja daje

$p\cos\varphi = p_1 - p_2\cos\theta$ **(1 bod)**

$p\sin\varphi = p_2\sin\theta$ **(1 bod)**

i zakon očuvanja energije **(1 bod)**

$$m_0c^2 + \sqrt{m_0{}^2c^4 + p^2c^2} = cp_1 + cp_2.$$

Izmjerena razlika energija fotona je $\Delta E = cp_2 - cp_1$. **(1 bod)**

Iz očuvanja količine gibanja izraze se p_1 i p_2 te uvrste u očuvanje energije. Osim toga, iz istih se jednadžbi vidi da je p usporediv s ΔE koji je mnogo manji od m_0c^2=0,511MeV. Nakon svega toga je

$$2m_0c = p\cos\varphi + \frac{p\sin\varphi}{\sin\theta}\cos\theta + \frac{p\sin\varphi}{\sin\theta}.$$ **(3 boda)**

Zbog θ <<1 ($\cos\theta \approx 1$ i $\sin\theta \approx \theta$) proizlazi $\theta\cdot 2m_0c = 2p\sin\varphi$. **(1 bod)**

Slijedi da komponenta količine gibanja elektrona okomita na smjer odleta fotona iznosi $p\sin\varphi = m_0c\theta$=1,17·10^{-24}kgms^{-1}. **(2 boda)**

Njoj okomita komponenta je $p\cos\varphi = p_1 - p_2\cos\theta \approx p_1 - p_2 = \frac{\Delta E}{c}$ = 1,03·10^{-25}kgms^{-1}. **(3 boda)**

Odatle je p=1,174·10^{-24}kgms^{-1}, čemu odgovara $E = \frac{p^2}{2m_0}$=7,54·10^{-19}J=4,72eV. **(2 boda)**

(Ostala rješenja su $\varphi \approx 85°$, $p_1 \approx p_2 \approx m_0c$ = 2,733·10^{-22}kgms^{-1} uz $p_2 - p_1 \approx 10^{-25}$kgms^{-1}, pa proizlazi da su korištene aproksimacije konzistentne.) **(2 boda ako već nije ubrojeno)**

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA

Poreč, 8. - 11. svibnja 2008.

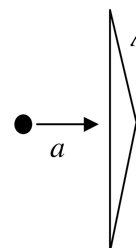
Srednje škole - 4. grupa

1. **zadatak** (17 bodova)

Ljudi dobrog vida ne vide oštru sliku kad gledaju pod vodom ako ne nose masku za ronjenje. Zašto?
Promotrite oko kao jednostavan optički sustav koji se sastoji od prozirne unutrašnjosti indeksa loma 1,4. Lom svjetlosti događa se jedino pri ulasku svjetlosti u oko kroz rožnicu. Tjeme rožnice udaljeno je 2,6cm od mrežnice. Zakrivljenost rožnice je takva da se pri gledanju u zraku na mrežnici fokusira slika predmeta iz beskonačnosti. Koliki je polumjer zakrivljenosti rožnice? Kolika je žarišna daljina tanke leće (mjerena u zraku) koju treba staviti pred to oko u vodi bez maske za ronjenje da bi ono fokusiralo na rožnici sliku predmeta iz beskonačnosti koji je također u vodi? Tu leću indeksa loma 1,62 se stavi na udaljenost 2cm od tjemena oka i s njene obje strane je voda čiji je indeks loma 1,33.

2. **zadatak** (18 bodova)

Pomoću interferometra poznatog kao Fresnelova biprizma dobivaju se iz uskog svjetlosnog izvora svijetle i tamne pruge na zaslonu. Interferenciju se može promatrati kao posljedicu nastanka dva koherentna izvora. Skiciraj položaje tih virtualnih izvora!
Kut prizme *A* je vrlo malen i iznosi 5mrad. Udaljenost izvora od biprizme je *a*=20cm. Indeks loma stakla je *n*=1,5. Koliki je međusobni razmak virtualnih izvora?
Koliki je razmak svijetlih pruga zelene svjetlosti valne duljine 500nm na zaslonu udaljenom 3m od biprizme?
Izračunaj sveukupan broj svijetlih pruga na zaslonu!
Za vrlo malene kutove φ može se uzeti $\sin\varphi \approx \varphi$ i $\cos\varphi \approx 1$.



3. **zadatak** (17 bodova)

Fuzijom jezgara u središtu Sunca proizvode se fotoni energija oko 1MeV, a s površine Sunca k nama dolaze fotoni prosječne valne duljine 500nm. Na putu od središta prema površini foton se mnogo puta rasprši na elektronima (reda 10^{26} puta).
Može li se klasičnom fizikom objasniti promjenu valne duljine fotona pri raspršenjima?
Kolika je promjena valne duljine fotona u prosječnom događaju raspršenja?
Za koliki prosječan kut se putanja izlaznog fotona pritom skrene s obzirom na dolazni foton?
Ustanovljeno je da fotonu treba oko 10^6 godina za dolazak iz središta na površinu Sunca. Procijeni udaljenost koju zraka svjetlosti unutar Sunca može prijeći bez raspršenja!

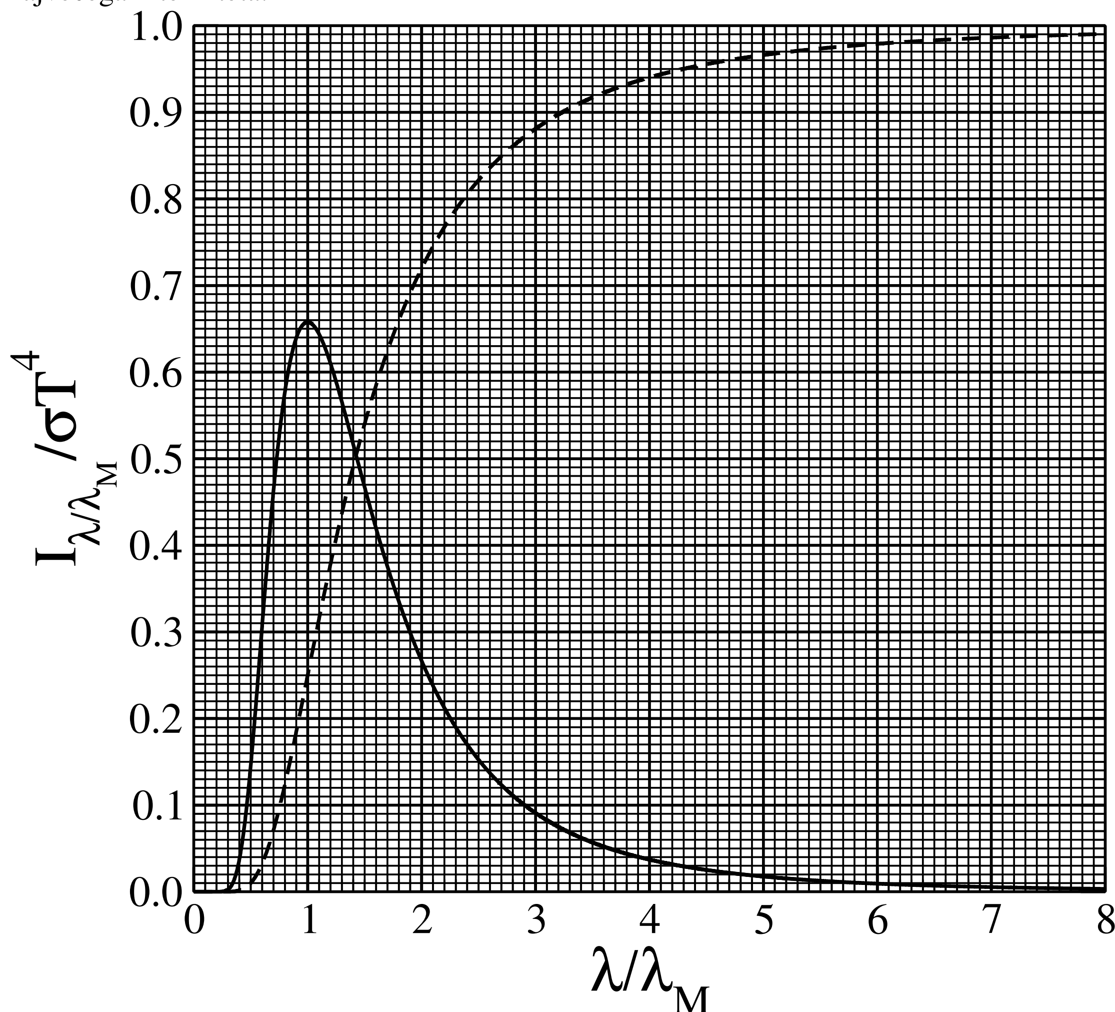
Za male kutove φ može se uzeti $\cos\varphi = 1 - \varphi^2/2$.

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Poreč, 8. - 11. svibnja 2008.

4. **zadatak** (18 bodova)

Plavi divovi su zvijezde koje se nakon eksplozije pretvaraju u crne rupe. Temperatura površine tipičnoga plavog diva je 30000K. Vidljivi sjaj, t.j. snaga izračena u okolinu u području vidljive svjetlosti (valna duljina od 400nm do 700nm), mu je 100000 puta veći od vidljivog sjaja Sunca. Polumjer Sunca je $6{,}96 \cdot 10^5$km, a ono zrači ukupnu snagu $3{,}86 \cdot 10^{26}$W. Pretpostavite da plavi div i Sunce zrače kao crno tijelo.
Pri kojoj valnoj duljini plavi div zrači najveći intenzitet te zašto se zove "plavi"?
Kolika je temperatura površine Sunca i zašto ga ne možemo nazvati "plavim"?
Koliki je polumjer opisanoga plavog diva?
Je li ispravno govoriti da je vidljivi sjaj proporcionalan ukupnoj zračenoj snazi? Pokaži to na ovom primjeru!

Spektralna gustoća intenziteta zračenja $I_{\lambda/\lambda M}$ normirana na ukupni intenzitet (puna linija) i njen kumulativni integral (iscrtkana linija) u ovisnosti o valnoj duljini izraženoj preko valne duljine λ_M največega intenziteta:



Planckova konstanta h=6,626·10^{-34}Js, brzina svjetlosti c=3·10^8m/s, masa elektrona m_e=9,11·10^{-31}kg, naboj elektrona q_e=-e=-1,6·10^{-19}C, Wienova konstanta C=0,0029Km, Štefan-Boltzmann konstanta σ=5,67· 10^{-8}W/m^{2}K.

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA

Poreč, 8. - 11. svibnja 2008.

Srednje škole - 4. grupa - rješenja zadataka

Zadatak 1 (17 bodova)

Indeks loma vode različit je od indeksa loma zraka pa se lom svjetlosti na sfernoj graničnoj plohi mijenja. Lom svjetlosti je slabiji kad je oko u vodi nego kad je u zraku pa se zrake pri gledanju pod vodom fokusiraju iza mrežnice. **(2 boda)**

Za sfernu graničnu plohu (rožnicu) polumjera zakrivljenosti R između medija indeksa loma n=1,4 i zraka vrijedi $\frac{1}{a}+\frac{n}{d}=\frac{n-1}{R}$, gdje je a udaljenost predmeta od rožnice, a d=2,6cm udaljenost od rožnice do slike, t.j. do mrežnice. **(2 boda)**

Uzimajući da je predmet u beskonačnosti, dobije se $R=d\frac{n}{n-1}=9{,}1\text{cm}$. **(2 boda)**

Kad je to oko u vodi indeksa loma n_v, slika predmeta udaljenog b od rožnice fokusirat će se na mrežnici ako je $\frac{n_v}{b}+\frac{n}{d}=\frac{n-n_v}{R}$.

(1 bod)

Odatle slijedi b=-2,5cm, gdje minus označava da predmet treba biti unutar oka. **(2 boda)**

To znači da korektivna leća treba proizvesti sliku na tom mjestu koje je udaljeno x'=2cm+2,5cm=4,5cm od nje. **(1 bod)**

Za leću u zraku vrijedilo bi $\frac{1}{x}+\frac{1}{x'}=\frac{1}{f}=(n_s-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$, gdje je n_s indeks loma stakla, a R_1 i R_2 su polumjeri zakrivljenosti stranica leće. **(2 boda)**

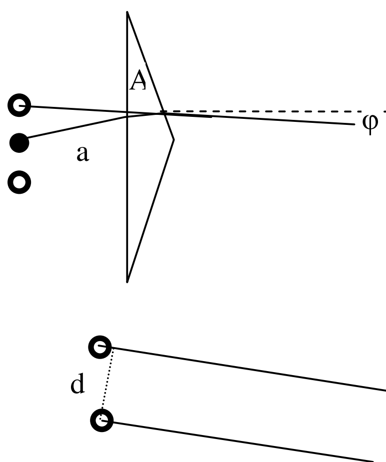
Na isti način, za tu leću u vodi vrijedi $\frac{n_v}{x}+\frac{n_v}{x'}=\frac{1}{f'}=(n_s-n_v)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$. **(2 boda)**

Iz te dvije jednadžbe i uz uvjet da je predmet u beskonačnosti slijedi $\frac{n_v}{x'}=(n_s-n_v)\cdot\frac{1}{f(n_s-1)}$.

(2boda)

To daje žarišnu daljinu leće mjerenu u zraku f=1,58cm. **(1 bod)**

Zadatak 2 (18 bodova)



Iz izvora zraka nailazi pod kutom α na prizmu, lomi se u staklu pod kutom β, nailazi na sljedeću graničnu plohu pod kutom γ te se lomi van u zrak pod kutom δ, sve mjereno s obzirom na okomice na graničnim plohama. Stoga možemo pisati $\sin\alpha = n\sin\beta$ i $n\sin\gamma=\sin\delta$. **(2 boda)**

Uvjet kutova unutar trokuta daje $A=\beta+\gamma$, a kut skretanja je $\varphi=\delta-A$. Iz navedenih jednadžbi i uz uvjet da su svi kutovi mnogo manji od 1rad, dobije se $\varphi=A(n-1)$. **(2 boda)**

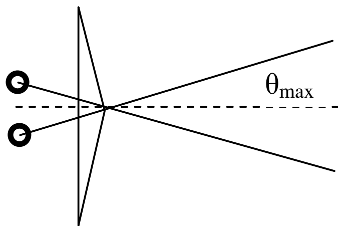
Svaki od virtualnih izvora otklonjen je za kut φ od horizontale tako da je udaljenost među izvorima $d=2a\varphi=2aA(n-1)=1\text{mm}$.

(2 boda + 1 za sliku)

Uvjet za konstruktivnu interferenciju zraka koje se šire iz dva virtualna izvora je $d\theta=k\lambda$, gdje je θ otklon od horizontale. **(2 boda)**

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Poreč, 8. - 11. svibnja 2008.

Položaj k-tog maksimuma na zaslonu udaljenom b od biprizme je $y_k = (a+b)\theta = \frac{(a+b)\lambda}{d}k$ pa je razmak susjednih maksimuma $y_k = \frac{(a+b)\lambda}{d} = 1{,}6\text{mm}$. **(4 boda)**



Broj vidljivih maksimuma određen je vrhom biprizme koji ograničava kut otklona na $\theta_{\max} = \frac{d}{2a}$. **(2 boda)**

Kutni razmak među maksimumima je $\Delta\theta = \frac{\lambda}{d}$ pa je ukupan broj maksimuma $N = 2\cdot\frac{\theta_{\max}}{\Delta\theta} = \frac{d^2}{a\lambda} = \frac{4aA^2(n-1)^2}{\lambda} = 10.$ **(3 boda)**

Zadatak 3 (17 bodova)

Promjenu valne duljine pri raspršenju svjetlosti na elektronima ne može se objasniti klasičnom fizikom, već apsorpcijom fotona valne duljine λ te emisijom fotona valne duljine λ', dakle kvantnom fizikom. **(2 boda)**

Iz zakona očuvanja energije $pc + m_e c^2 = p'c + E$, gdje su p i p' količine gibanja fotona i E konačna energija elektrona, zatim zakona očuvanja količine gibanja $\vec{p} - \vec{p}' = \vec{P}$, gdje je P konačna količina gibanja elektrona, te uz jednakost $E^2 = m^2c^4 + P^2c^2$ i deBroglieve relacije $\lambda = \frac{h}{p}$ za foton slijedi jednadžba Comptonova raspršenja $\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\varphi)$, gdje je φ kut pod kojim odleti izlazni foton s obzirom na smjer dolaznoga. **(2 boda)**

Nakon prvoga sudara je $\lambda_1 - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1-\cos\varphi_1)$, **(1 bod)**

gdje je $\lambda_0 = \frac{hc}{E_0}$, što uz E_0=1MeV iznosi λ_0=1,242·10^{-12}m << λ_N. **(1 bod)**

Nakon drugoga sudara $\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}(1-\cos\varphi_2)$

i tako dalje do N-toga $\lambda_N - \lambda_{N-1} = \frac{h}{mc}(1-\cos\varphi_N)$. **(2 boda)**

Zbrajanjem tih N jednadžbi slijedi $\lambda_N - \lambda_0 = N\frac{h}{mc} - \frac{h}{mc}\sum_{i=1}^{N}\cos\varphi_i$.

U ogromnom broju sudara energija fotona se postupno mijenja pa su kutovi φ maleni te vrijedi $\cos\varphi = 1 - \varphi^2/2$. Stoga je $\lambda_N - \lambda_0 = \frac{h}{2mc}\sum_{i=1}^{N}\varphi_i^2 = \frac{Nh}{2mc}\overline{\varphi^2}$. **(2 boda)**

Prosječni kvadrat otklona je $\overline{\varphi^2} \approx \frac{2mc\lambda_N}{Nh} = 4{,}12\cdot 10^{-21}$. **(1 bod)**

Promjena valne duljine u prosječnom sudaru je $\lambda_{i+1} - \lambda_i = \frac{h}{2mc}\varphi_i^2 = 5\cdot 10^{-33}\text{nm}$. **(2 boda)**

Za prosječni otklon slijedi $\varphi_i = \sqrt{\frac{2mc(\lambda_{i+1}-\lambda_i)}{h}} = 3{,}7\cdot 10^{-9}\,°$. **(1 bod)**

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Poreč, 8. - 11. svibnja 2008.

Prosječno vrijeme između dva sudara je $\tau = \frac{t}{N}$ gdje je *t* ukupno vrijeme putovanja fotona. **(1 bod)**

Stoga je srednji slobodni put fotona (zrake svjetlosti) $l = c\tau = \frac{ct}{N} = 0{,}095\text{mm}$. **(2 boda)**

Zadatak 4 (18 bodova)

Valna duljina pri kojoj plavi div zrači najvećim intenzitetom dobije se iz Wienova zakona $\lambda_{MD} = \frac{C}{T_D} = 96{,}7\text{nm}$, gdje je *C* Wienova konstanta, a T_D temperatura površine. **(1 bod)**

Zvijezda se naziva plavim divom zato jer je od vidljivog spektra najintenzivnije zastupljen plavi dio. **(1 bod)**

Kuglasto tijelo polumjera *R* temperature *T* zrači snagu $P = 4\pi R^2 \sigma T^4$, gdje je σ Štefan-Boltzmann konstanta. **(1 bod)**

Temperatura površine Sunca je $T_S = \sqrt[4]{\frac{P_S}{4\pi R_S^2 \sigma}} = 5784\text{K}$. **(1 bod)**

Valna duljina pri kojoj Sunce zrači najintenzivije je $\lambda_{MS} = \frac{C}{T_S} = 501\text{nm}$, što odgovara žutoj boji. **(2 boda)**

Ako je η udio intenziteta zračenja unutar vidljivog dijela spektra u ukupnom intenzitetu, onda prema uvjetu zadatka možemo pisati $P_D\eta_D = 100000 \cdot P_S\eta_S$. **(2 boda)**

Sa slike uz zadatak očitamo površinu ispod krivulje gustoće intenziteta s granicama od 400nm do 700nm. Za Sunce to odgovara od $0{,}8\lambda_{MS}$ do $1{,}4\,\lambda_{MS}$, a za plavi div od $4{,}14\,\lambda_{MD}$ do $7{,}24\,\lambda_{MD}$. Dobije se $\eta_S = 0{,}493 - 0{,}131 = 0{,}362$ i $\eta_D = 0{,}987 - 0{,}947 = 0{,}04$. **(5 bodova)**

Slijedi $R_D = R_S \left(\frac{T_S}{T_D}\right)^2 \cdot 10^{5/2} \cdot \left(\frac{\eta_S}{\eta_D}\right)^{1/2} = 35{,}4 \cdot R_S = 2{,}46 \cdot 10^{10}\text{m}$. **(3 boda)**

Vidljivi sjaj je $P_v = \eta P$, a budući da η ovisi o temperaturi s kojom se pomiče položaj λ_M s obzirom na granice vidljivog spektra, to vidljivi sjaj nije proporcionalan ukupnoj izračenoj snazi. **(2 boda)**

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Vukovar, 3. - 6. svibnja 2009.

Srednje škole - 4. skupina

Prirodne konstante:
- brzina svjetlosti $c=3\cdot10^8$m/s
- Planckova konstanta $h=6{,}626\cdot10^{-34}$Js
- elementarni naboj $e=1{,}6\cdot10^{-19}$C
- unificirana atomska jedinica mase $u=1{,}66\cdot10^{-27}$kg
- masa elektrona $m_e=9{,}11\cdot10^{-31}$kg

Uputa:
- za $|x| << 1$ možete uzeti $(1+x)^n = 1+n\cdot x$ za bilo koji realan n i bilo koji predznak od x
- za $|x| << 1$ možete uzeti $\sin x = x$, $\mathrm{tg}x = x$, $\cos x = 1-x^2/2$

1. zadatak (20 bodova)

Temperatura atmosfere iznad tla mijenja se s visinom pa se stoga mijenja i njen indeks loma. Naložiš se na prostranoj homogenoj ravnici gdje je ovisnost indeksa loma zraka n o visini y iznad tla opisana izrazom $n(y) = 1{,}000293 + 0{,}000005\cdot[1 - \exp(-y/10\text{mm})]$.
a) Promotri dvije zrake svjetlosti koje se šire horizontalno, jedna na visini 5mm, a druga na visini 5,1mm iznad tla. Koliku udaljenost prijeđe gornja zraka svjetlosti za vrijeme dok donja prijeđe 1m?
Za koliko radijana i u kom smjeru će skrenuti horizontalan snop svjetlosti širok 0,1mm koji putuje na toj visini? Pokaži da je promjena kuta θ između zrake i horizontale po pomaku x u horizontalnom smjeru dana izrazom $d\theta/dx = -(1/n)\cdot dn/dy$.
b) Dokaži da umnožak $n\cdot\cos\theta$ mora biti jednak na svim visinama. Pokaži da zraka neće dospjeti u tlo ako postane $\theta = 0$. Ako je $\theta = 0$ za y = 0,1mm, koliki je θ na visini 30mm iznad tla? Pretpostavi da iznad 30mm više nema promjene temperature atmosfere. Ako su ti oči na visini 1,6m od tla, na kojoj najmanjoj udaljenosti na tlu vidiš odraz neba?

2. zadatak (18 bodova)

Dvije vertikalne dipolne antene zrače elektromagnetske valove jednakih valnih duljina λ i jednakih amplituda. Razmak među antenama je d. Promatraj interferenciju na udaljenostima mnogo većim od d. Uzmi da je θ kut između pravca promatranja i pravca koji prolazi simetrično između antena, pa antenu smještenu u $\theta = \pi/2$ nazovi prvom, a onu u $\theta = -\pi/2$ drugom antenom.
a) Pretpostavi da obje antene emitiraju u fazi! Za koji θ je zračenje najintenzivnije ako je $d = \lambda/2$, a za koji θ ako je $d = \lambda$?
b) Za koliki dio perioda treba zračenje iz druge antene zaostajati za zračenjem iz prve da bi promatrač koji se nalazi na $\theta = 210°$ osjetio najintenzivnije zračenje? Ovdje je $d = \lambda/2$.
c) Avion koji leti brzinom 230km/h na udaljenosti 10km od antena u smjeru tangencijalno s obzirom na središte antena mjeri intenzitet zračenja te tako određuje svoj kutni položaj, a iz brzine promjene intenziteta brzinu svoga leta. Antenski operater odluči pomicati fazu prve antene s obzirom na fazu druge da bi zbunio pilota. Kolikom brzinom operater mijenja razliku faza u trenutku kad je avion oko položaja $\theta = 0$ tako da se pilotu čini kao da stoji na mjestu i ne putuje navedenom tangencijalnom brzinom? Ovdje je $d = \lambda/2$ i $\alpha = 0$.

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA

Vukovar, 3. - 6. svibnja 2009.

3. zadatak (20 bodova)

Kad stacionaran slobodan atom emitira foton, mora mu se dogoditi odboj u suprotnom smjeru. Promatraj jezgru željeza ^{57}Fe čija je energija prvog pobuđenog stanja E = 14,4keV iznad osnovnog, a širina tog pobuđenog stanja je $\Delta E = 5 \cdot 10^{-9}$eV.
a) Pokaži da je energija emitiranoga fotona $hf=E(1-E/2Mc^2)$, gdje je M masa jezgre. Izračunaj energiju fotona sa i bez uračunavanja odboja te usporedi njihovu razliku sa širinom pobuđenog stanja pa zaključi može li nastali foton pobuditi drugu mirujuću jezgru ^{57}Fe.
b) Kolikom brzinom se mora gibati druga jezgra ^{57}Fe da se omogući njeno pobuđivanje fotonom emitiranim iz prve jezgre?
c) U Mőssbauerovoj spektrometriji koristi se navedena emisija i apsorpcija da bi se proučavalo međudjelovanje u tvari putem promjene energija tih jezgrinih stanja. Pritom se obje jezgre nalaze u čvrstoj matrici, npr. kristalnoj rešetki. Objasni zašto u tom slučaju učinak odboja ne onemogućuje apsorpciju emitiranog fotona. Jedan od razloga promjene energije jezgrinih stanja jest međudjelovanje elektrona u s-orbitalama s jezgrom konačne veličine. Kolika je promjena razlike energija prvog pobuđenog i osnovnog stanja ako je uzorak potrebno pomicati brzinom 12mm/s prema izvoru fotona energije E da bi se dogodila apsorpcija? Što možeš reći o osjetljivosti ovakvog eksperimenta za mjerenje međudjelovanja?

4. zadatak (12 bodova)

Sve je više znanstvenih rezultata koji upozoravaju na štetnost mobitelskog zračenja, čija je tipična frekvencija 1800MHz. Primjerice, unutar opsežnog međunarodnog projekta "Reflex" uočeno je još 2004. godine da izlaganje elektromagnetskom zračenju iz mobitela uzrokuje poremećaje u strukturi kromosoma i kidanje lanca DNK. To je dodatno poljuljalo dotadašnje vjerovanje da mobitelsko zračenje ispoljava jedino toplinske učinke. Mehanizam spomenutog utjecaja na DNK nije potpuno objašnjen.
Promotri taj problem polazeći od DNK lanca kao jednodimenzionalnog vodiča. Naime, uzmi da je DNK molekula širine 2nm i duljine 0,4μm, te da su one priređene u otopini u obliku gotovo ravnih lanaca. Nadalje, odnedavno je poznato da je električna vodljivost DNK približna vodljivosti grafita. Stoga se neke elektrone u molekuli može promatrati kao čestice mase m_e koje se slobodno gibaju u jednom smjeru unutar duljine lančaste molekule. Kvantna fizika tumači da se može ostvariti samo takvo gibanje za koje je duljina molekule jednaka cjelobrojnom višekratniku polovice deBroglieve valne duljine elektrona.
Izračunaj dopuštene (kinetičke) energije elektrona koji se slobodno giba duž molekule DNK te izračunaj frekvenciju elektromagnetskog vala koji izaziva prijelaz elektrona iz najnižeg stanja u prvo pobuđeno stanje.

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Vukovar, 3. - 6. svibnja 2009.
Srednje škole - 4. skupina
Rješenja i smjernice za bodovanje

1. zadatak (20 bodova)

a) Za vrijeme Δt gornja zraka prijeđe put $l_g = \frac{c}{n_g}\Delta t$, a donja $l_d = \frac{c}{n_d}\Delta t$,

gdje su $n_g = n(5{,}1\text{mm}) = 1{,}000293 + 1{,}9975 \cdot 10^{-6}$ i $n_d = n(5\text{mm}) = 1{,}000293 + 1{,}9670 \cdot 10^{-6}$. **(2b.)**

Slijedi $l_g = l_d \frac{n_d}{n_g} = l_d - l_d \cdot 3 \cdot 10^{-8}$, tj. gornja zraka prijeđe $3 \cdot 10^{-8}$m manje od donje. **(2b.)**

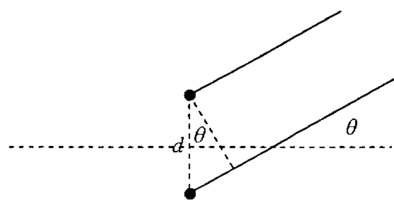
Gornji rub zrake je od donjeg udaljen 0,1mm, a prijeđe $3 \cdot 10^{-5}$mm manje, pa je kut skretanja dan s $\text{tg}\varphi = \varphi = 3 \cdot 10^{-4}$rad. **(1b.)**
Promotri dva sloja, donji indeksa loma n i gornji indeksa $n+\Delta n$. Vremena u kojima zrake svjetlosti prelaze put x su $t_n = (x+\Delta x)n/c$ i $t_{n+\Delta n} = x(n+\Delta n)/c$. Iz $t_n = t_{n+\Delta n}$ slijedi $x\Delta n = n\Delta x$. **(2b.)**

Kut skretanja je $\theta = -\Delta x/\Delta y$, pa je $x\frac{\Delta n}{\Delta y} = -n\theta$. **(2b.)**

Za infinitezimalne pomake i otklone je stoga $\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{n}\frac{dn}{dy}$. **(1b.)**

b) Za međusobno paralelne slojeve sredstava različitog indeksa loma mora vrijediti $n \cdot \sin\alpha$ = konst, gdje je α kut između zrake i okomice na graničnu plohu unutar sredstva gdje je indeks loma n. Ovdje je $\theta = 90° - \alpha$, pa je $n \cdot \cos\theta$ = konst. **(2b.)**
Ako postane $\theta = 0$, zraka neće ući u tlo, jer skreće prema gore zbog $dn/dy > 0$. **(2b.)**
Iz $n_{01} \cdot \cos\theta_{01} = n_{30} \cdot \cos\theta_{30}$ i $\theta_{01} = 0$ slijedi nakon razvoja po malenim veličinama $\theta_{30} = 3{,}066 \cdot 10^{-3}$rad. **(3b.)**
Udaljenost na kojoj se vidi odraz neba u tlu je $l = h/\text{tg}\theta_{30}$ jer je visina iznad koje se zraka širi pravocrtno zanemariva u usporedbi s visinom očiju h. Slijedi $l = 520$m. **(3b.)**

2. zadatak (18 bodova)



a) Razlika faza između dvije pristigle zrake je $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta$. **(2b.)**
Za $d = \lambda/2$ uvjet za maksimum je $\pi \sin\theta = n \cdot 2\pi$ pa su jedina rješenja $\theta = 0$ i $\theta = \pi$. **(2b.)**
Za $d = \lambda$ uvjet za maksimum je $2\pi \sin\theta = n \cdot 2\pi$ pa su rješenja $\theta = 0$ i $\theta = \pi$ te $\theta = \pi/2$ i $\theta = -\pi/2$. **(2b.)**

b) Razlika faza između dvije zrake sada je $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta + \alpha$, gdje je α zaostajanje zračenja iz druge za prvom antenom. **(3b.)**
Da bi u $\theta = 210°$ bio maksimum intenziteta, mora biti $\pi \sin 210° + \alpha = n \cdot 2\pi$, čije rješenje je $\alpha = \pi/2$.
Zračenje druge zaostaje za četvrtinu perioda s obzirom na zračenje prve antene. **(3b.)**
c) Brzina promjene faze zbog pomicanja aviona brzinom v mora biti jednaka promjeni faze antena. **(1b.)**

Kad se avion pomakne za kut $\Delta\theta = \frac{v}{r}\Delta t$, faza među zrakama promijeni se za $\Delta\varphi = \pi \sin\frac{v\Delta t}{r}$. **(2b.)**

Pritom razliku faza antena treba promijeniti za $\Delta\Phi = \Omega\Delta t$, gdje je Ω brzina promjene te faze. **(1b.)**

Za $\Delta\theta \ll 1$ je $\sin\frac{v\Delta t}{r} = \frac{v\Delta t}{r}$ pa iz $\Delta\Phi = \Delta\varphi$ slijedi $\Omega = \pi v/r = 0{,}02$rad/s. **(2b.)**

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Vukovar, 3. - 6. svibnja 2009.

3. zadatak (20 bodova)

a) Energija E dobivena prijelazom raspodijeli se na foton i energiju odboja $E = hf + E_{odb}$. **(1b.)**

Očuvanje količine gibanja zahtijeva $\frac{hf}{c} = p_{odb}$. **(1b.)**

Relativistička energija i količina gibanja p_{odb} jezgre mase M povezani su na način $(E_{odb} + Mc^2)^2 = p_{odb}^2 c^2 + M^2 c^4$. **(2b.)**

Te tri jednadžbe daju $hf = E\frac{E + 2Mc^2}{2E + 2Mc^2}$, što za $E << Mc^2$ postaje $hf = E\left(1 - \frac{E}{2Mc^2}\right)$. **(2b.)**

Energija fotona bez uračunavanja odboja je $hf_0 = E = 14{,}4\text{keV}$.
Energija fotona u slučaju odboja jezgre je $hf = 14{,}4\text{keV}\cdot(1-1{,}35\cdot 10^{-7})$.
Razlika energija je 1,95meV. To je mnogo veće od širine energijskog stanja ΔE, pa je apsorpcija takvog fotona nemoguća. **(2b.)**

b) Giba li se jezgra brzinom u ususret fotonu, zbog Dopplerova učinka bit će mu veća frekvencija, pri čemu je potrebno ostvariti $f_0 = \sqrt{\frac{c+u}{c-u}}f$. **(2b.)**

Zbog bliskosti f i f_0 slijedi $u = c\frac{f_0 - f}{f_0} = \frac{E}{2Mc} = 40{,}5\text{m/s}$. **(3b.)**

c) Kad su obje jezgre u matrici mase mnogo veće od mase jezgre, kinetička energija odboja je zanemariva pa foton ima energiju E koju druga jezgra može apsorbirati. **(2b.)**

Frekvencija apsorbiranog fotona je $f' = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}f$. **(1b.)**

Promjena razlike energija među stanjima uz $v << c$ je stoga $h(f'-f) = h\frac{v}{c}f = E\frac{v}{c} = 5{,}76\cdot 10^{-7}\text{eV}$.**(2b.)**

Eksperiment zavaljujući uskoj energijskoj liniji može vrlo precizno mjeriti promjene energija jezgrinih stanja. **(2b.)**

4. zadatak (12 bodova)

deBroglieva valna duljina elektrona je $\lambda = \frac{h}{p}$. **(1b.)**

Može se ostvariti ono gibanje za koje je $\frac{\lambda}{2}\cdot n = L$, gdje je L duljina molekule DNK, a $n = 1,2,3,\ldots$ **(2b.)**

Slijedi da su dopuštene količine gibanja elektrona u lančastoj molekuli DNK $p_n = \frac{h}{2L}\cdot n$. **(2b.)**

Dopuštene energije (samo kinetički doprinos) su $E_n = \frac{p_n^2}{2m_e} = \frac{h^2}{8m_e L^2}\cdot n^2 = 3{,}765\cdot 10^{-25}\text{J}\cdot n^2$. **(3b.)**

$E_1 = 3{,}765\cdot 10^{-25}\text{J}$, $E_2 = 15{,}06\cdot 10^{-25}\text{J}$. **(2b.)**

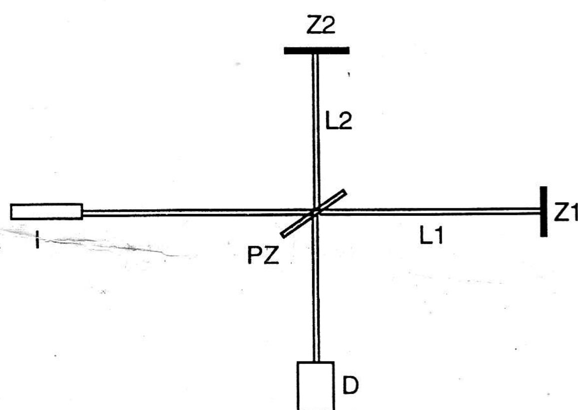
Frekvencija vala čiji foton izaziva prijelaz među tim stanjima je $f = \frac{E_2 - E_1}{h} = 1700\text{MHz}$. **(2b.)**

DRŽAVNO NATJECANJE I SMOTRA IZ FIZIKE

Varaždin, 2. - 3. svibnja 2010

Srednje škole – 4. skupina

1. zadatak (20 bodova)



Michelsonov interferometar sastoji se od izvora I crvene svjetlosti valne duljine 635nm, polupropusnog zrcala PZ, dva zrcala Z1 i Z2 te detektora D, postavljenih kako je prikazano na slici. Polupropusno zrcalo, zakrenuto za kut 45° s obzirom na put L1 i put L2, od upadne zrake načini dvije zrake polovičnog intenziteta, jedna prođe duž L1, a druga se odbije duž L2. Zrcala Z1 i Z2 su postavljena okomito na L1, odnosno L2. Nakon refleksije dviju zraka na zrcalima Z1 i Z2 pri povratku na PZ opet se svakoj zraci događa isto: polovica intenziteta se odbije, a polovica prođe. Kao rezultat do detektora dospiju dvije zrake koje interferiraju.

a) Ako se Z1 polako pomiče duž L1 na detektoru se u vremenu izmjenjuju maksimumi i minimumi. Za koliko se pomaknulo zrcalo Z1 ako je uređaj izbrojio da je u detektoru kao rezultat tog pomicanja prošlo 1573 maksimuma?

b) Duž puta L1 postavljen je šuplji evakuirani valjak na čijim su krajevima stakleni poklopci, a prostor između poklopaca dug je 10cm. Valjak se polagano puni plinom do uspostavljanja standardnog tlaka. Za to vrijeme u detektoru je izbrojen prolazak 1573 maksimuma. Koliki je indeks loma plina?

c) Michelson i Morley su namjeravali izmjeriti brzinu gibanja Zemlje kroz pretpostavljeni Eter (medij kroz koji se šire elektromagnetski valovi). Pretpostavili su da će se tada brzina svjetlosti na mjestu njihova interferometra dobiti zbrajanjem brzine svjetlosti c u Eteru i brzine gibanja Zemlje v=30km/s kroz Eter. L1 je postavljeno duž smjera gibanja Zemlje. Daljine duž dva okomita smjera u njihovu eksperimentu iznosile su L1=L2=11m. Kolika bi prema njihovim pretpostavkama bila razlika vremena putovanja zrake svjetlosti koja je prešla od PZ do Z1 te nazad do PZ i one koja je prešla od PZ do Z2 te nazad do PZ? Koliki pomak izražen preko valne duljine bi izazvalo preokretanje interferometra tako da L2 postane usmjeren duž gibanja Zemlje? Budući da nikakav pomak nije uočen iako interferometar može detektirati pomak od 0,01 λ, kakav zaključak predlažeš za v? Taj rezultat bio je važan ne samo radi odbacivanja hipoteze o Eteru, već i kao polazište za apsolutnost brzine svjetlosti.

2. zadatak (15 bodova)

Sustav za zumiranje čini skup leća koje proizvode različito povećanje dok zadržavaju položaj predmeta i slike na svojim mjestima. Povećanje se mijenja pomicanjem jedne ili više leća duž optičke osi. Dok se u praksi koristi više leća da bi se dobilo što kvalitetniju sliku, efekt zumiranja može se pokazati i pomoću sustava dvije leće. Predmet, dvije sabirne leće i zaslon nalaze se na optičkoj osi. Prva leća desno od predmeta ima žarišnu daljinu 5cm, a druga leća koja je desno od prve leće ima žarišnu daljinu 10cm. Zaslon je desno od druge leće. Predmet je postavljen na udaljenost 7,5cm lijevo od prve leće i slika na zaslonu ima povećanje 1. a) Kolika je udaljenost predmeta i zaslona? b) Obje leće pomaknu se duž optičke osi, dok predmet i zaslon zadrže svoj položaj, nakon čega slika na zaslonu ima povećanje 3. Izračunaj pomake leća s obzirom na njihove početne položaje!

DRŽAVNO NATJECANJE I SMOTRA IZ FIZIKE
Varaždin, 2. - 3. svibnja 2010

3. zadatak (15 bodova)

Leteći zmajem iznad brežuljaka najednom u dolini opaziš mnoštvo cvjetova jaglaca i pomisliš da ih ima na milijune. Raspoređeni su unutar kruga čiji je promjer 50m, a promatraš ih s visine iznad središta. Pretpostavi da su promjeri cvjetova dosta manji od njihova razmaka, te da su jednoliko razmaknuti jedni od drugih i složeni tako da ih stane najviše moguće unutar kruga. Valna duljina žute svjetlosti je 575nm.
a) Primjećuješ da spuštanjem ispod visine 303m od tla vidiš cvjetove kao pojedinačne, dok na visini iznad 303m ne razlučuješ cvjetove jedne od drugih. Procijeni što preciznije koliko je cvjetova unutar kruga ako znaš da su posloženi najgušće moguće?
b) Da bi u oku nastao osjet vida, potrebno je da u sekundi kroz zjenicu uđe barem 60 fotona. Pretpostavi da je efektivni promjer cvijeta 2cm (razmak središta im je izračunat u a) zadatku) i da 1,5% energije u sunčevom zračenju pripada žutoj svjetlosti. Na površinu zemlje upada 600W/m^2 Sunčeva zračenja. Cvjetovi emitiraju svu upadnu žutu svjetlost jednoliko u svim smjerovima prema nebu (polovica sfere). Uz te vrlo grube pretpostavke izračunaj koliko ti fotona žute svjetlosti u sekundi sa svakog cvijeta ulazi kroz zjenicu? Jesu li stoga i s energijskog kriterija svi cvjetovi vidljivi?

4. zadatak (20 bodova)

a) Neutroni se mogu dobiti putem fisije radioaktivnih izotopa. Jedan od takvih je i kalifornij ^{252}Cf koji se dobiva ozračivanjem urana u nuklearnim reaktorima. Cijena tipičnog novog ^{252}Cf izvora koji emitira 10^8 neutrona u sekundi iznosi \$20,000. Vrijeme poluraspada je 2,645 godina. Vjerojatnost fisije pri svakom raspadu jezgre ^{252}Cf je 3,09% (ostalo su α-raspadi koji ne proizvode neutrone), a prosječan broj neutrona po fisiji je 3,73 (događa se niz emisija neutrona pri promjeni po izotopima kirija). Kolika je cijena jednog grama izotopa ^{252}Cf?
b) Iz tog izvora najviše emitiranih neutrona jest energije oko 1MeV. Masa neutrona je $1{,}675\cdot10^{-27}$kg, što odgovara energiji 939,5MeV. Da bi bili prikladni za istraživanja u fizici čvrstog stanja, ovi neutroni moraju se usporiti tako da im valna duljina bude približna onoj karakterističnoj za udaljenosti među atomima, za koju uzmi $5\cdot10^{-10}$m. Usporavanje se odvija uzastopnim elastičnim sudaranjem sa vrlo sporim jezgrama čija je masa p puta veća od neutronske. Izvedi izraz koji povezuje broj sudara N s p i s v_N/v_0 (omjer konačne i početne brzine neutrona)! Koliki je broj potrebnih sudara s jezgrama deuterija ^{2}H za to usporenje! Je li manji broj sudara potreban pri sudaranju s težim jezgrama ili lakšim jezgrama?
c) Nakon ovog znatnog usporavanja primjenom monokromatora dobije se snop neutrona podjednakih bzina kojima odgovara valna duljina $6{,}4\cdot10^{-10}$m. Snop neutrona koristi se za određivanje razmaka među ravninama magnetskih atoma u kristalu. (Cijena ovih neutrona je preskupa i obično se koriste drugi izvori.) Braggov maksimum za difrakciju neutronskog snopa na kristalu manganova oksida MnO pri temperaturi tekućeg dušika pojavljuje se kad snop upada pod najmanjim kutom od 21.2° s obzirom na ravninu Mn iona. Koliki je razmak među tim ravninama? Ako je neodređenost valne duljine neutronskog snopa 1%, koliko stupnjeva je široka linija ovog difrakcijskog maksimuma?

Prirodne konstante:
- brzina svjetlosti $c=3\cdot10^8$m/s
- Planckova konstanta $h=6{,}626\cdot10^{-34}$Js
- elementarni naboj $e=1{,}6\cdot10^{-19}$C
- unificirana atomska jedinica mase $u=1{,}66\cdot10^{-27}$kg

Uputa: za $|x| << 1$ možete uzeti $(1+x)^n = 1+n\cdot x$ za bilo koji realan n i bilo koji predznak od x

DRŽAVNO NATJECANJE I SMOTRA IZ FIZIKE

Varaždin, 2. - 3. svibnja 2010

Srednje škole - 4. skupina
Rješenja i smjernice za bodovanje

1. zadatak (20 bodova)

a) Pomak Z1 za x dovodi do dodatne razlike puta $2x$ pa je uvjet za konstruktivnu interferenciju $2x=k\lambda$.

Iz zadanog slijedi pomak $x=\dfrac{1573\lambda}{2}=0{,}5\text{mm}$. **(5b)**

b) Dodatna razlika optičkih puteva pri punjenju plinom dovodi do konstruktivne interferencije kada je $2(n-1)l=k\lambda$.

Iz zadanog je indeks loma $n=1+\dfrac{1573\lambda}{2l}=1{,}005$. **(5b)**

c) Ukupno vrijeme potrebno zraci da prijeđe udaljenost od PZ do Z1 i nazad do PZ je $\dfrac{L}{c-v}+\dfrac{L}{c+v}$.

Za zraku od PZ do Z2 i nazad do PZ vrijeme putovanja je $\dfrac{2L}{\sqrt{c^2+v^2}}$. **(4b)**

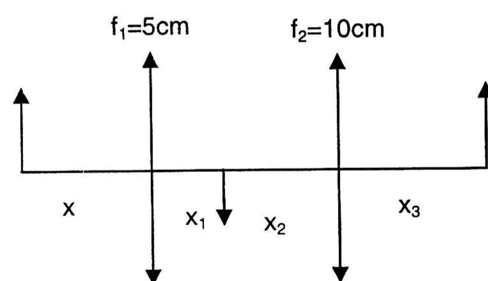
Razlika tih dvaju vremena jest $\Delta t=\dfrac{2L}{c}\left(\left(1-v^2/c^2\right)^{-2}-\left(1-v^2/c^2\right)^{-1/2}\right)$, što za $v<<c$ iznosi $\Delta t\approx\dfrac{Lv^2}{c^3}$.

Okretanjem interferometra za 90° ostvari se dvostruko veća razlika vremena, koja se može izraziti preko razlike optičkih puteva kao $\Delta d=2c\Delta t=\dfrac{2Lv^2}{c^2}$. **(3b)**

Iz zadanog je $\dfrac{\Delta d}{\lambda}=\dfrac{2\cdot 11m\cdot(30km/s)^2}{635nm\cdot(300000km/s)^2}=0{,}346$. **(2b)**

Pomak bi trebao biti mnogo veći od osjetljivosti uređaja. Budući da nije opažen, zaključuje se da gibanje Zemlje s obzirom na eter nije moguće detektirati. **(1b)**

2. zadatak (15 bodova)



a) Za predmet, međusliku i sliku je $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{f_1}$ i $\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}=\dfrac{1}{f_2}$, a zadano ukupno povećanje je $\dfrac{x_3}{x_2}\cdot\dfrac{x_1}{x}=1$. **(2b)**

Iz zadanog x=7,5cm slijedi x_1=15cm, zatim $x_2=2x_3$ te x_2=30cm i x_3=15cm. Stoga je udaljenost predmeta i zaslona $x+x_1+x_2+x_3=67{,}5\text{cm}$. **(3b)**

b) Kad se pomicanjem leća ponovno ostvari oštra slika, vrijedi $\dfrac{1}{x'}+\dfrac{1}{x_1'}=\dfrac{1}{f_1}$ i $\dfrac{1}{x_2'}+\dfrac{1}{x_3'}=\dfrac{1}{f_2}$, a ukupno povećanje je $\dfrac{x_3'}{x_2'}\cdot\dfrac{x_1'}{x'}=3$. **(1b)**

Udaljenost mora i dalje ostati $x'+x_1'+x_2'+x_3'=67{,}5\text{cm}$. **(1b)**

Jasno ali zamorno rješavanje ove četiri jednadžbe daje rješenje: primjerice moguće je iz prve i druge jednadžbe dvaput na različit način izraziti omjere položaja i uvrstiti u omjer veličina slika te potom u očuvanje duljine i ponovno iskoristiti jednu od jednadžbi leće. Krajnja kvadratna jednadžba vodi do dva skupa rješenja: i) x'=8,784cm, x_1'=11,61cm, x_2'=14,40cm, x_3'=32,71cm te ii) x'=6,573cm, x_1'=20,89cm, x_2'=20,59cm, x_3'=19,44cm. **(6b)**

Dva tražena rješenja su: i) pomak lijeve leće 1,284cm udesno i desne 17,71cm ulijevo te ii) pomak lijeve leće 0,927cm ulijevo i desne leće 4,44cm ulijevo. **(2b)**

3. zadatak (15 bodova)

a) Zjenicom promjera d razlučiti se mogu točke kutno udaljene barem θ ako vrijedi $d\sin\theta=1{,}22\lambda$. **(3b)**

Gledajući s visine D=303m cvjetove razmaknute za s, kutni razmak je s/D, pa je $s=\dfrac{1{,}22\lambda D}{d}=5{,}3$cm.

Krugovi složeni u ravnini najgušće moguće zauzimaju 0,906 ukupne površine. Stoga unutar kruga polumjera r=2km stane $N=0{,}906\dfrac{r^2}{(s/2)^2}=800000$. **(4b)**

b) Žutoj svjetlosti pripada 1,5% od 600W/m^2, što je 9W/m^2.

Cvijet promjera 2cm emitira 9W/m$^2\cdot$(0,01m)$^2\pi$=2,83$\cdot10^{-3}$W žute svjetlosti. **(3b)**

Od toga na zjenicu dolazi dio $\dfrac{(d/2)^2\pi}{2\pi D^2}=2{,}18\cdot10^{-11}$, što je 6,16$\cdot10^{-14}$W. **(2b)**

Energija fotona je $E_f=\dfrac{hc}{\lambda}=3{,}457\cdot10^{-19}$J pa je broj 'žutih' fotona koji upada u oko u jedinici vremena s pojedinog cvijeta 1,78$\cdot10^5$/s, što zadovoljava i energijske zahtjeve oka. **(3b)**

4. zadatak (20 bodova)

a) Iz $N=N_0e^{-\lambda t}$ slijedi $A=-dN/dt=\lambda N_0e^{-\lambda t}$, tj $A=\lambda N$, gdje je $\lambda=\ln2/T_{1/2}$.

Stoga je broj raspada u sekundi $A=\dfrac{N\ln2}{T_{1/2}}$, gdje je N broj jezgara, a $T_{1/2}$ vrijeme poluraspada. **(2b)**

Broj fisija po sekundi je $s=pA=\dfrac{pN\ln2}{T_{1/2}}$, gdje je p vjerojatnost fisije pri raspadu. **(1b)**

Broj neutrona po sekundi je $n=qs=\dfrac{pqN\ln2}{T_{1/2}}$, gdje je q broj neutrona po fisiji. **(1b)**

Slijedi masa ^{252}Cf uzorka $m=NMu=\dfrac{nT_{1/2}Mu}{pq\ln2}$=4,37$\cdot10^{-5}$g pa je cijena grama 458 milijuna $. **(3b)**

b) Za elastičan sudar neutrona mase m i jezgre mase M vrijedi $mv_0=mv_1+Mv_1'$ i $mv_0^2=mv_1^2+Mv_1'^2$.

Iz toga slijedi brzina neutrona nakon sudara $v_1=v_0\dfrac{m-M}{m+M}$. **(2b)**

Nakon z sudara lako se vidi da je $v_z=v_0\left(\dfrac{1-p}{1+p}\right)^z$, gdje je $p=M/m$. **(2b)**

Početna brzina je $v_0=\sqrt{2E/m}=1{,}4\cdot10^7$m/s, a poželjna konačna brzina je $v_z=\dfrac{h}{\lambda m}=800$m/s. **(2b)**

Za p=2 slijedi $z=\dfrac{\ln(v_z/v_0)}{\ln|-1/3|}=8{,}88$, što znači da je potrebno prosječno 9 sudara. **(1b)**

Ako su jezgre teže, potrebno je više sudara. **(1b)**

c) Iz Braggove jednadžbe $2d\sin\theta=k\lambda$ za najmanji kut slijedi $d=\dfrac{575nm}{2\sin21{,}2°}=8{,}85\cdot10^{-10}$m. **(2b)**

Diferenciranjem slijedi jednadžba $2d\cos\theta\Delta\theta=k\Delta\lambda$, iz čega je $\Delta\theta$=3,88mrad=0,22°. **(3b)**

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA

Vinkovci, 5.-8. svibnja 2011.

Srednje škole - 4. grupa

1. zadatak (20 bodova)

Andrija Mohorovičić je uvodeći novost promatranja bliskih potresa došao do značajnih zaključaka, a nakon snažnog Pokupskog potresa 1909. g. definitivno je srušio dotadašnji nazor o kontinuiranosti gornjeg sloja Zemlje. Tomu u čast granica između kore (iznad) i plašta (ispod) nazvana je Mohorovičićevim diskontinuitetom. Kad se u hipocentru ispod površine Zemlje dogodi potres, nastaje prostorni val koji se širi u svim smjerovima. Brzina longitudinalnog vala veća je od brzine transverzalnog vala ($v_l > v_t$). Stoga do seizmološke stanice udaljene l od epicentra (točka na površini iznad hipocentra) dolaze dva dominantna poremećaja: P-val (*prima*-prvi, odgovara longitudinalnom) i S-val (*secunda*-drugi, odgovara transverzalnom). Polumjer Zemlje je R=6370 km.

a) Mohorovičić je uočio da na udaljenostima $l<l_{Max}$ dolaze po dvije S i dvije P faze istog vala, dok za $l>l_{Max}$ dolazi po jedna S i P faza. Rekonstruiraj (skicom i obrazloženjem) kako se pomoću uvođenja diskontinuiteta slojeva i skokovite promjene brzine između kore i plašta može objasniti ta pojava! Skiciraj putanje valova do seizmološke postaje koja je na $l<l_{Max}$ i do postaje koja je na $l>l_{Max}$!

b) Izračunaj dubinu Mohorovičićeva diskontinuiteta D ako je opaženo da na udaljenostima većim od l_{Max}=720 km od epicentra ne stižu dva para valova, nego samo jedan par! Radi geometrijskog pojednostavljenja uzmi da je hipocentar vrlo blizu površine Zemlje! U ovom podzadatku radi dobivanja rješenja što bližeg stvarnosti ne pretpostavljaj da se valovi šire pravocrtno, nego po zakrivljenoj putanji! Međutim, radi mogućnosti analitičkog rješavanja, uzmi da je polumjer zakrivljenosti putanja konstantan i iznosi r=2000 km! To u stvarnosti nije tako, ali ipak daje izvrsno poklapanje s uvelike kompliciranijim točnijim rješenjem.

c) Iz činjenice da se po dva para valova ne pojavljuju niti na udaljenostima manjim od l_{min}=300 km od epicentra, već se tu pojavljuje samo jedan par, izračunaj brzinu longitudinalnih i transverzalnih valova neposredno ispod Mohorovičićeva diskontinuiteta! Poznata je brzina tih valova neposredno iznad diskontinuiteta: v_l=5,68 km/s i v_t=3,32 km/s. Za dubinu diskontinuiteta uzmi rezultat iz prethodnog podzadatka, a hipocentar je također vrlo blizu površine. U ovom podzadatku pretpostavi da se valovi kroz koru šire pravocrtno, što daje rezultat prilično blizak stvarnom! Komentiraj kakav je stvarni skok brzine znajući da je putanja ipak zakrivljena.

2. zadatak (15 bodova)

C_{60}, tzv. fuleren, je loptasta molekula van der Waalsova promjera 1,1 nm, gdje su ^{12}C atomi smješteni po površini u vrhove peterokuta i šesterokuta raspoređenih baš kao polja na nogometnoj lopti. Prolaskom snopa fulerena kroz rešetku snimljena je 1999. godine difrakcijska slika, a rezultati objavljeni u časopisu *Nature* pokazuju da je to vrlo zanimljiv primjer makroskopske kvantne interferencije jedinki C_{60}.

a) Snop C_{60} dobiven je sublimacijom na temperaturi 900 K, a prolaskom kroz dva otvora širine 10 μm udaljenih 1 m on postaje prilično usmjeren. Zahvaljujući dobrom vakuumu, srednji slobodni put molekula je reda veličine 100 m. Usmjeren snop odmah upada na nanolitografski proizveden difrakcijsku rešetku perioda 100 nm. Na udaljenosti 1,25 m od rešetke nalazi se poseban laserski/ionizacijski detektor koji bilježi prispjele molekule s mikrometarskom prostornom razlučivosti, čak i u ovom slučaju kad dolazi samo nekoliko molekula po sekundi. Time je uspješno snimljena difrakcijska slika koja osim središnjeg maksimuma ima i maksimume udaljene 26 μm od njega. Kolika je brzina molekula C_{60} koje daju takvu difrakcijsku sliku? Obrazloži kako se ta brzina slaže s očekivanom u procesu sublimacije? Na temelju koje usporedbe možeš reći da se radi o makroskopskoj kvantnoj interferenciji?

b) Za snimanje difrakcijske slike važno je ne izgubiti koherentnost od rešetke do detektora, za što je preduvjet da nema međudjelovanja s okolinom i među molekulama. Temeljem kojih argumenata možemo reći da nema međudjelovanja molekula? Zatim, valna duljina snopa treba biti dovoljno manja od perioda rešetke. Je li to ispunjeno? Nadalje, molekule C_{60} zagrijane na 900 K zrače kao crno tijelo te temperature. Pod pretpostavkom da ona zrači kao kuglica danog polumjera i uz poznatu ukupnu emisivnost $\varepsilon=5\cdot10^{-5}$ izračunaj gubitak energije molekule pri gibanju od rešetke do detektora i kolikom broju fotona valne duljine 10 μm to odgovara?

3. zadatak (20 bodova)

Slojevito oslikavanje pozitronskom emisijom (PET, *positron emission tomography*) sve je raširenija metoda pretrage pacijenata. Najčešće korišten radiofarmaceutik pritom je fluorodeoksiglukoza (FDG), analog glukoze u koji je ugrađen fluor ^{18}F, čijim ulaskom u stanice raka (koje intenzivnije troše šećer) postaje moguće vidjeti gdje se te stanice uglavnom nalaze.

a) Jezgre ^{18}F emitiraju pozitrone. Vrijeme poluraspada jezgara je 109,77 minuta. Pripadne atomske mase su 18,0009377u za fluor (Z=9) i 17,9991604u za kisik (Z=8). Napiši jednadžbu nuklearne reakcije i izračunaj oslobođenu energiju! Kolika je masa FDG ubrizgana u tijelo pacijenta, ako je aktivnost ubrizganog FDG u početnom trenutku 400 MBq? Molarna masa FDG je 181,15 g/mol, a u svakoj molekuli je jedna ^{18}F jezgra. Za usporedbu, izračunaj kolika masa urana $^{235}U^{92}$ ima istu aktivnost kao i navedena količina FDG, ako mu je vrijeme poluraspada $7{,}13\cdot10^{8}$ godina. Koliko pozitrona po sekundi nastaje u tijelu kada osoba nakon 2 sata izlazi iz klinike?

b) Prošavši udaljenost od 1 mm pozitron uspori do vrlo malih brzina izgubivši veliku početnu energiju. Kad mu brzina postane usporediva s brzinama okolnih elektrona u tkivu, poništavanje pozitrona s elektronom postane jako vjerojatno. Jednim poništavanjem nastaju dva fotona. Kolike su energija i količina gibanja fotona i u kojem smjeru oni lete? Zašto ne nastaje samo po jedan foton? Ako se pozitron i elektron nađu blizu jedan drugome, ali ne toliko blizu da se ponište, može nastati njihovo vezano stanje slično vodikovu atomu, samo od drugih sastavnih elementarnih čestica, te kratkog trajanja. Takav atom – pozitronij, predvidio je Stjepan Mohorovičić 1934. g. Kolika je energija vezanja atoma pozitronija?

c) Mnogo detektora gama zraka smješteno je na prstenu koji se nalazi oko pacijenta, te se detekcijom parova fotona nastalih u desetak tisuća raspada odredi raspodjela zračenja u elementu tkiva. Detekcijom para fotona određuje se linija na kojoj se dogodio raspad. Ako je vremenska rezolucija detektora jako precizna, može se odrediti i na kojem dijelu linije je bio snimljeni raspad. Unutar kolike duljine se nalazi pojedini snimljeni raspad, ako se koriste napredni detektori u kojima je vremenska rezolucija 1 ns?

d) $^{18}F^{9}$ se dobiva u obližnjim akceleratorima sudaranjem protona energije 18 MeV s teškom vodom obogaćenom s $^{18}O^{8}$. Napiši jednadžbu reakcije i izračunaj kinetičku energiju nakon reakcije!

4. zadatak (15 bodova)

Grafen je oblik ugljika gdje su atomi ^{12}C poredani u ravnini na vrhovima jednakostraničnih šesterokuta koji se dodiruju svojim stranicama duljine 0,142 nm. On se može proizvesti i u jednoatomnim slojevima. Pretpostavi da zbog neobičnih elektronskih svojstava apsorbira približno sve elektromagnetsko zračenje u vidljivom dijelu spektra.

a) Izračunaj potreban intenzitet homogenog snopa svjetlosti valne duljine 550 nm usmjerenog vertikalno na donju stranu monoslojne grafenske plohe postavljene vodoravno u blizini Zemljine površine da bi ona lebdjela!

b) Grafenska monoslojna ploha u obliku kruga promjera 10 μm također lebdi u istom snopu. Za koliko vremena će ona ubrzati svoju vrtnju do 30000 okretaja u minuti od trenutka uključivanja kružno polarizirane svjetlosti? Svaki foton posjeduje kutnu količinu gibanja $\hbar$. Takav eksperiment objavljen je 2010.g. u *Physical Review* B.

Konstante:

- brzina svjetlosti $c=3\cdot10^{8}$ m/s
- Planckova konstanta $h=6{,}626\cdot10^{-34}$ Js
- Boltzmannova konstanta $k_B=1{,}38\cdot10^{-23}$ J/K
- elementarni naboj $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ C
- Stefan-Boltzmannova konstanta $\sigma=5{,}67\cdot10^{-8}$ W/m^{2}K^4
- masa elektrona $m_e=9{,}1095\cdot10^{-31}$ kg
- masa protona $m_p=1{,}67265\cdot10^{-27}$ kg
- masa neutrona $m_n=1{,}67495\cdot10^{-27}$ kg
- unificirana atomska jedinica mase $u=1{,}66056\cdot10^{-27}$ kg
- Avogadrova konstanta $N_A=6{,}022\cdot10^{23}$ /mol

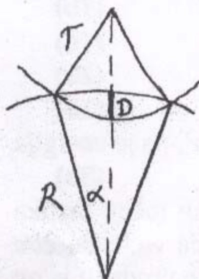
DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA

Vinkovci, 5.-8. svibnja 2011.

Srednje škole - 4. grupa – Rješenja

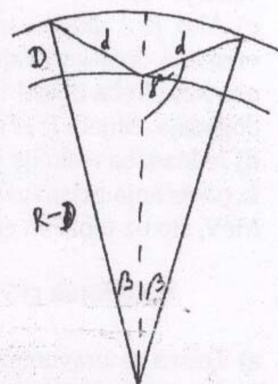
1. zadatak (20 bodova)

a) Jedan par S i P valova stiže od izvora do postaje direktno kroz koru, a drugi par prelaskom u plašt i nazad u koru. Bliže mogu doći oba para valova, a dalje samo jedan par, i to onih koji stižu direktno, dok oni čija bi putanja sjekla Mohorovičićev diskontinuitet, ne mogu stići do postaje. **(2b+2b)**



b) Očito je $D=R+r-d$. **(2b)**
Kosinusni poučak daje $2Rd\cos\alpha=R^2+d^2-r^2$, gdje je $2\alpha=l_{Max}/R$ kutna udaljenost postaje od epicentra , tj. $\alpha=l_{Max}/2R=3{,}24°$. **(3b)**
Smisleno rješenje je d=8327,1 km, što daje D=42,9km. **(2b)**

c) Dolazak valova kroz plašt bliže od l_{min}=300 km nije moguć jer bi tada val upadao prestrmo na plohu i zapravo otišao dalje od 300 km. **(1b+2b)**



Najbliža točka upada za koju se mora dogoditi potpuna refleksija odmaknuta je za kut β od epicentra dan izrazom $\beta=l_{min}/2R=1{,}35°$ **(1b)**
Primjena kosinusnog poučka daje $2R(R-D)\cos\beta=R^2+(R-D)^2-d^2$, iz čega slijedi d=155,6 km. **(1b)**
Sinusni poučak daje $\sin\gamma=R/d\ \sin\beta$, gdje je γ kut upada vala na plohu diskontinuiteta, što daje $\gamma=74{,}67°$. **(1b)**
Budući da je to granični kut upada za potpunu refleksiju, vrijedi $\sin\gamma=v_{iznad}/v_{ispod}$, što za transverzalni val daje $v_{t,ispod}$=3,44 km/s i za longitudinalni $v_{l,ispod}$=5,89 km/s. **(2b)**
Stvarni skok brzine je nešto veći jer zbog zakrivljenosti putanje vala on upada položenije nego je uzeto u rješenju. **(1b)**

2. zadatak (15 bodova)

a) Uvjet za prvi maksimum pri difrakciji je $d\sin\theta=\lambda$, gdje je d period rešetke, a kut je $\sin\theta=\mathrm{tg}\theta=\theta=a/l$, gdje je a=26 μm i l=1,25 m. **(1b)**
Valna duljina određena je deBroglievim izrazom $\lambda=h/Mv$, gdje je $M=60\cdot12\cdot u$ masa molekule C_{60}. **(2b)**
Iz uvjeta za maksimum dobije se $\lambda=2{,}08\cdot10^{-12}$m. **(1b)**
Iz deBroglieva izraza slijedi v=266 m/s. **(1b)**
Izjednačavanje toplinske i kinetičke energije daje srednju kvadratičnu brzinu 176,6 m/s. **(1b)**
Manja brzina bi se dobila za veći d, tj. čini se da veličina molekule promjera $2r$ efektivno smanjuje razmak među pukotinama. **(1b)**
O makroskopskoj kvantnoj interferenciji možemo govoriti jer je $2r>>\lambda$. **(1b)**
b) Srednji slobodni put je mnogo veći od daljina gibanja pa se molekule međusobno ne sudaraju, a osim toga molekule rijetko dolaze do detektora u usporedbi s vremenom putovanja. **(2b)**
$d>>\lambda$ je ispunjeno. **(1b)**
Izračena energija dana je Stefan-Boltzmannovim zakonom $\Delta E=\sigma T^4\cdot\varepsilon\cdot4r^2\pi\cdot\Delta t$, gdje je $\Delta t=l/v$. **(2b)**
Slijedi $\Delta E=3{,}32\cdot10^{-20}$J. **(1b)**
Uzimajući energiju fotona valne duljine 10 μm, slijedi da molekula izrači 1,7 fotona. **(1b)**

3. zadatak (20 bodova)

a) Jednadžba reakcije je $^{18}F^{9} \rightarrow {}^{18}O^{8} + \beta^{+} + \nu_e$. **(1b)**
Iz defekta mase 18,0009377u-17.9991604u+m_e-m_e, jer F ima elektron više nego O, dobije se oslobođena energija 1,66 MeV. **(2b)**
Iz aktivnosti $A=N\lambda$ slijedi broj jezgara $N=AT/\ln 2=3{,}8\cdot10^{12}$. Masa glukoze je $m=NM/N_A=1{,}14\cdot10^{-9}$ g. **(3b)**
Za uran iste aktivnosti masa je 5066 g. **(1b)**
Nakon 2 sata aktivnost FDG je $A=A_0\cdot(1/2)^{t/T}=187{,}5$ MBq. **(1b)**
b) Nastaju dva fotona jer se s jednim ne bi mogla očuvati količina gibanja. **(1b)**
Iz $2m_ec^2=2E_f$ slijedi energija fotona $E_f=8{,}2\cdot10^{-14}$J=0,512 MeV. **(2b)**
Količina gibanja fotona je $p=E_f/c=2{,}73\cdot10^{-22}$ kgm/s, i jednom je suprotna od drugog. **(1b)**
Bohrov model atoma pozitronija iz $m_ev^2/r=ke^2/(2r)^2$ i $m_evr=nh/2\pi$ daje $E=-\pi^2k^2e^4m_e/4h^2n^2$, pa je energija vezanja -1,7 eV. **(3b)**
c) Ako je l duljina unutar koje se dogodio raspad, onda se usporedbom dvije rubne točke razlika vremena dolaska dvaju fotona do detektora od l/c promijeni na $-l/c$. Stoga je promjena vremena $2l/c$ ona koja treba upasti unutar vremenske rezolucije T_R da bi se dva fotona registrirala kao produkti istog događaja. Slijedi $l=cT_R/2$=15 cm. **(3b)**
d) Jednadžba reakcije je $^{18}O^{8} + p \rightarrow {}^{18}F^{9} + n$. **(1b)**
Iz povećanja mase (uzimajući i dodatni elektron u atomskoj masi) dobije se smanjenje energije od -3,47 MeV, što uz uloženu energiju od 18 MeV daje konačnu energiju 14,53 MeV. **(1b)**

4. zadatak (15 bodova)

a) Težina je uravnotežena silom tlaka svjetlosnog zračenja, tj. količinom gibanja koju fotoni predaju grafenu po jedinici vremena: $mg=S\cdot I/c$. **(2b)**
Površinska gustoća mase m/S uzimajući dva atoma po šesterokutu iznosi $\sigma=7{,}607\cdot10^{-7}$ kg/m². **(2b)**
Stoga je $I=\sigma gc$=2239 W/m². **(2b)**
b) Osim količine gibanja h/λ, foton pločici predaje i kutnu količinu gibanja $h/2\pi$. **(1b)**
Iz $I=\Delta N/S\Delta t\cdot hc/\lambda$, gdje je $S=r^2\pi$, dobije se broj fotona ΔN. **(3b)**
Zbog očuvanja kutne količine gibanja je $mr^2\omega/2=\Delta N\cdot h/2\pi$, gdje je ω kutna brzina pločice. **(3b)**
Slijedi $\Delta t=r^2\pi\sigma\omega c/I\lambda$ = 29 ms. **(2b)**

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Korčula, 13.-16. svibnja 2012.

Srednje škole - 4. grupa

1. zadatak (20 bodova)

Ova je godina zbog čestih pljuskova u sunčana popodneva obilovala pojavama duga. Pretpostavi da Sunčeva svjetlost obasjava kuglaste kapljice kiše. Imajući u vidu da se prema promatraču vrati značajan intenzitet obojene svjetlosti koja potječe od Sunca koje je iza promatrača, predloži skicu koja će objasniti nastanak duge, te objasni podrijetlo rasipanja po bojama.
Izvedi izraz koji određuje kut skretanja zrake svjetlosti s obzirom na upadnu zraku, od ulaska zrake do njenog izlaska iz kapljice. Izračunaj najmanji kut skretanja za crvenu (indeks loma 1,3318) i ljubičastu svjetlost (indeks loma 1,3435)! Pokaži da se najveći dio svjetlosti odbije upravo u smjeru blisku njemu! Stoga se zraka pod tim kutom naziva dugina zraka. Kolika je kutna debljina duge i gdje se nalazi ljubičasta, a gdje crvena boja?
Objasni može li se duga vidjeti u Korčuli koja je na 43° geografske širine kad je Sunce u zenitu? Objasni može li se vidjeti polukružna duga? Objasni gledaju li dvije osobe istu dugu? Zašto je duga rijetko vidljiva zimi?
Druga duga nastaje jednom refleksijom više unutar kapljice nego razmatrana prva duga? Pod kojim se kutom ona vidi i koji joj je poredak boja?

2. zadatak (20 bodova)

Žiroskopi su instrumenti koji trebaju osigurati određeni referentni smjer. Pored onih poznatih koji rade preko očuvanja kutne količine gibanja zvrka, danas se sve više koriste optički žiroskopi jer su kompaktniji, jednostavniji, jeftiniji, osjetljivi i lako se integriraju s elektronikom. Interferometarski žiroskop s optičkim vlaknom sastoji se od izvora svjetlosti valne duljine 1550nm i detektora koji kruže zajedno jedan pored drugog po kružnici polumjera R = 5cm kutnom brzinom Ω. Izvor emitira svjetlost u oba smjera duž kružno namotanog vlakna indeksa loma n=1,444 po obodu kružnice. Vlakno je namotano N = 1000 puta po cijeloj kružnici (i spojenih je krajeva) te obje zrake svjetlosti moraju obići cijelo to vlakno da bi došle do detektora. Snopovi svjetlosti koji se šire u međusobno suprotnim smjerovima interferiraju i ukupni intenzitet mjeri se detektorom.
Izvedi izraz za faznu razliku među dvjema zrakama kada stignu do detektora!
Napiši izraz za intenzitet koji mjeri detektor te osjetljivost intenziteta na promjenu faze i na promjenu kutne brzine (promjena intenziteta po jedinici faze, odnosno po jedinici kutne brzine).
Koliki raspon kutnih brzina se može jednoznačno određivati ovim žiroskopom? Na koliku kutnu brzinu treba zavrtjeti žiroskop da bi postigao najveću osjetljivost oko te vrijednosti?
Izračunaj najmanju promjenu kutne brzine koju možemo detektirati, zanemarujući sve smetnje i šumove, te pretpostavljajući da je u tom slučaju osjetljivost detektora određena time da je on 24-bitni, to jest da može registrirati promjene od 1 u 2^{24} od maksimalnog intenziteta na koji je podešen!

3. zadatak (20 bodova)

Upravljanje snopom neutrona zahtijeva veliku fizikalnu maštovitost. Promotrit ćemo vođenje neutrona kroz kutiju i izlazak monokromatskog snopa iz nje. Za zatočenje termalnih neutrona koristi se vakumirana kutija od monokristala silicija. Promatrat ćemo neutrone brzine 150m/s. Kolika je valna duljina neutrona u tom snopu?
S jedne strane na kutiji nalazi se prozor u Fabry-Pérot konfiguraciji koji treba osigurati izlazak neutrona određene valne duljine. Prozor se sastoji od trosloja, koji redom čini vrlo tanki sloj nikla, 100 nm titana, te opet vrlo tanki sloj nikla, nanešenih na debelu podlogu titana radi mehaničke potpore. Kroz titan neutroni prolaze kao da je proziran, dok se na niklu događa djelomično odbijanje/refleksija i djelomični prolazak/transmisija, pri čemu apsorpciju u materijalima zanemarite. Iako detalji ovise o svojstvima materijala, priroda pojave dolazi iz fizikalne optike, te je tako pojednostavljeno i promatrajte, pogotovo jer daje zadovoljavajuće rezultate. Štoviše, u danim uvjetima brzina neutrona u titanu gotovo je jednaka kao u kutiji i vani.
Odnos koeficijenata transmisije T i refleksije R za snop neutrona na zanemarivo tankim slojevima nikla je takav da na izlaznoj strani imamo mnogo neutronskih valova koji interferiraju. Izvedi izraz za intenzitet izlaznog snopa u ovisnosti o kutu upada i debljini srednjeg sloja, te ostalih potrebnih parametara, kao T, R, itd.
Napiši uvjet za maksimalni izlazni intenzitet! Koliko on tada iznosi u odnosu na intenzitet istog snopa u cijevi? Izračunaj dva izlazna kuta snopa neutrona zadane brzine najbliža stjenki prozora!

4. zadatak (10 bodova)

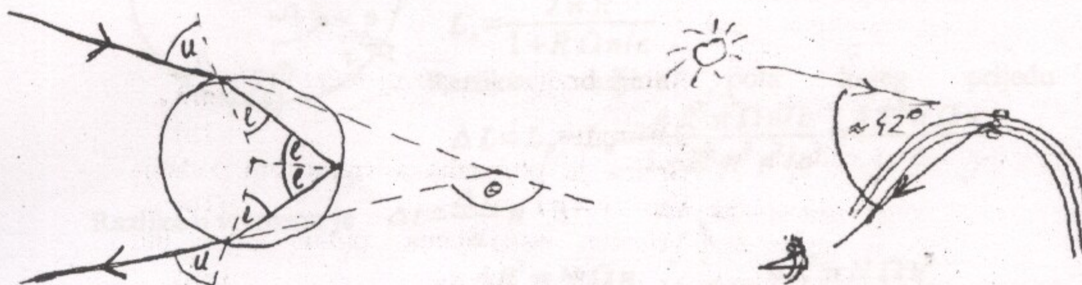
Nedavno su fizičari izmjerili gravitacijsko ubrzanje koristeći odbijanje atoma pomoću laserskog snopa, a eksperiment je popularno nazvan kvantni trampolin. Kompaktnost i preciznost takvog uređaja omogućit će mu primjenu u navigaciji i istraživanju Zemljine kore, ali i proučavanju odstupanja od Newtonovog zakona gravitacije. Plin od ~10000 ^{87}Rb atoma laserski je ohlađen ispod mikrokelvina tako da im je kinetička energija zanemariva prije nego počnu padati u gravitacijskom polju Zemlje. Kad se isključi magnetsko polje koje ih drži zatočenima, atomi ubrzavaju prema dolje i sudaraju se s fotonima iz lasera snopa usmjerenog prema gore. Budući da se sudari događaju u vrlo kontroliranim uvjetima, o čemu govori i ponavljanje odbijanja velik broj puta, te zahvaljujući savršenom poznavanju sile prilikom sudara, eksperiment je vrlo precizno odredio g=9,814m/s^2. Valna duljina svjetlosti koju su upotrijebili je 780,193nm (27GHz pulsni plavi diodni laser) i ona odgovara energiji jednog od prijelaza elektrona u atomu Rb.
Svakih koliko vremena je potrebno ponoviti svjetlosni puls da bismo dobili periodičko odbijanje na istoj visini? Kolika je brzina odbijenog atoma?
Čini li Dopplerov pomak probleme opisanoj apsorpciji fotona imajući u vidu da su tipična vremena poluraspada pobuđenih elektronskih stanja u atomu reda veličine 10^{-7}s?

Konstante:

- brzina svjetlosti $c=3\cdot 10^8$ m/s
- Planckova konstanta $h=6,626\cdot 10^{-34}$ Js
- Boltzmannova konstanta $k_B=1,38\cdot 10^{-23}$ J/K
- elementarni naboj $e=1,6\cdot 10^{-19}$ C
- masa elektrona $m_e=9,1095\cdot 10^{-31}$ kg
- masa protona $m_p=1,67265\cdot 10^{-27}$ kg
- masa neutrona $m_n=1,67495\cdot 10^{-27}$ kg
- unificirana atomska jedinica mase $u=1,66056\cdot 10^{-27}$ kg

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Korčula, 13.-16. svibnja 2012.
Srednje škole - 4. grupa – Rješenja

1. zadatak (20 bodova)

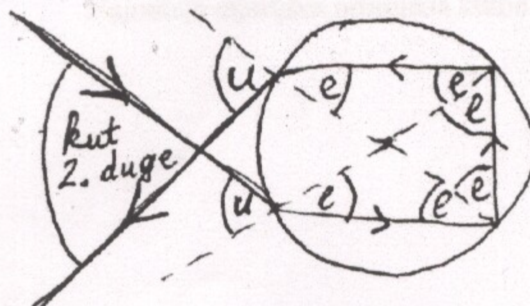


Zraka se reflektira unutar kapljice da bi se vratila prema promatraču, a zbog ovisnosti indeksa loma o valnoj duljini, lom će ovisiti o boji, a time i ukupan kut skretanja. Slika. **(2b)**
Sa slike se vidi: $\theta = u-l+\pi-2l+u-l=\pi+2u-4l=\pi+2u-4\arcsin((\sin u)/n)$. **(2b)**

Najmanji θ dobije se iz $\frac{d\theta}{du}=2-\frac{4\cos u}{\sqrt{n^2-\sin^2 u}}=0$ pa je $\cos u=\sqrt{\frac{n^2-1}{3}}$. **(2b)**

Za crvenu u=59,480°, l=40,303°, θ_{min}=137,747°, a za ljubičastu u=58,801°, l=39,545°, θ_{min}=139,424°.
Kut pod kojim promatrač vidi dugu je $\pi-\theta$, što za crvenu iznosi 42,253° i za ljubičastu 40,576°.
Znači da je crvena unutar, a ljubičasta izvana. **(2b)**
Zrake upadaju pod različitim kutovima na kapljice, pa im je različit kut skretanja. Oko minimuma najviše upadnih zraka reflektira se blisko s θ_{min}. Osim po definiciji derivacije, u to se možemo još više uvjeriti računajući $\theta(u)$, i uočavanjem da se za velike promjene u, θ slabo mijenja oko svog minimuma. **(3b)**
U zenitu je Sunce više nego 42,2° iznad horizonta, pa je duga ispod horizonta, te se ne vidi. **(1b)**
Polukružna duga može se vidjeti samo u zoru ili pri zalasku jer samo tada može okomito ulaziti u tlo. **(1b)**
Dugine zrake dolaze s točno određenog mjesta u oko, pa ako je oko na drugom mjestu, i zraka u njega dolazi iz drugog mjesta, što znači da svatko gleda svoju dugu. **(1b)**
Zimi su kapljice obično zamrznute te je teško ostvariti potrebnu refleksiju. **(1b)**
Za dvije refleksije unutar kapljice je: $\theta = u-l+\pi-2l+\pi-2l+u-l=2\pi+2u-6l=2\pi+2u-6\arcsin((\sin u)/n)$.

Analogno prethodnom postupku dobiva se $\cos u=\sqrt{\frac{n^2-1}{8}}$. Slika! **(3b)**



Odatle je za crvenu u=71,881°, l=45,531°, θ_{min}=230,576°, a za ljubičastu u=71,505°, l=44,901°, θ_{min}=233,604°.
Traženi kut duge je 50,576° za crvenu i 53,604° za ljubičastu, te je poredak boja obrnut od onog kod prve duge. **(2b)**

2. zadatak (20 bodova)

Gledajući iz referentnog sustava, zraka koja putuje u smjeru vrtnje prijeđe veću udaljenost $L_p = 2\pi R + R\Omega t_p$, a suprotna manju $L_n = 2\pi R - R\Omega t_n$. **(1b)**

Uzimajući $t_p = \frac{L_p}{c} n$ i $t_n = \frac{L_n}{c} n$ slijedi $L_p = \frac{2\pi R}{1 - R\Omega n/c}$ i $L_n = \frac{2\pi R}{1 + R\Omega n/c}$. **(2b)**

Razlika duljina puta kojeg prijeđu dvije zrake je $\Delta L = L_p - L_n = \frac{4R^2\pi\Omega n/c}{1 - R^2\pi^2 n^2/c^2} = \frac{4R^2\pi\Omega n}{c}$. **(2b)**

Razlika u vremenu je $\Delta t = \frac{\Delta L}{c} n$. **(1b)**

Za obilazak N petlji je $\Delta L = \frac{4R^2\pi N\Omega n}{c}$ i $\Delta t = \frac{4R^2\pi N\Omega n^2}{c^2}$. **(1b)**

Promjena faze u vremenu Δt je $\Phi = 2\pi f\,\Delta t$, gdje je $f = c/\lambda$, a $\lambda = 1550\text{nm}$ zadana valna duljina u zraku.

Stoga je $\Phi = \frac{8\pi^2 N R^2 n^2 \Omega}{\lambda c}$. **(2b)**

Amplituda svjetlosti na detektoru je $E_D = E_p \exp(i\cdot 0) + E_n \exp(-i\cdot\Phi)$. **(1b)**

Intenzitet je $I_D = E_d \bar{E}_d = 2I(1 + \cos\Phi)$. **(1b)**

Osjetljivost je $|dI/d\Phi| = 2I\sin\Phi$, odnosno $|dI/d\Omega| = 2I\sin\Phi\cdot\frac{8\pi^2 N R^2 n^2}{\lambda c}$. **(2b)**

Za $\Phi = 0$ i $\Phi = \pi$ imamo najmanju osjetljivost (0), kada je $\Omega = \frac{\lambda c}{8\pi N R^2 n^2}$. Maksimalna je osjetljivost ostvarena na polovici toga, za $\Omega_{max} = \frac{\lambda c}{16\pi N R^2 n^2}$ =1,785rad/s=102,3°/s pa ga na tu kutnu brzinu treba zavrtjeti. **(2b)**

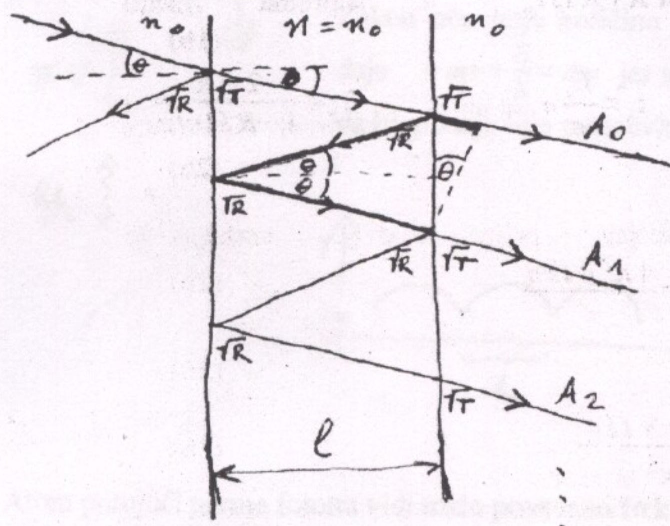
Ω se jednoznačno određuju od 0 do Ω_{max}, dok se za ostale ponavlja I. **(1b)**

Maksimalna osjetljivost je $|dI/d\Phi| = 2I = \frac{I_{max}}{2}$. Promjena faze je $\Delta\Phi = \Delta I\cdot\frac{2}{I_{max}}$ koja se zbog rezolucije detektora da očitati u koracima $\Delta\Phi = \frac{2}{2^{24}}$. **(2b)**

Promjena kutne brzine je $\Delta\Omega = \frac{\lambda c}{8\pi^2 N R^2 n^2}\Delta\Phi$ =3,55 rad/s $\cdot\Delta\Phi$. **(1b)**

Najmanja mjerljiva promjena kutne brzine je $4{,}23\cdot 10^{-7}$rad/s = 0,087°/h. **(1b)**

3. zadatak (20 bodova)



Valna duljina neutronskog snopa je $\lambda=\frac{h}{mv}=$ 2.637nm. **(2b)**

Indeks loma snopa svugdje je 1, a na slojevima nikla imamo samo refleksije i transmisije, pri čemu amplituda svaki puta dobije dodatni faktor $\sqrt{R}$ i $\sqrt{T}$. **(1b)**

Prva transmitirana zraka zbog dvije transmisije ima amplitudu $T\exp(i\frac{2\pi}{\lambda}\frac{l}{\cos\theta})$ gdje je u eksponentu fazni pomak zbog geometrijskog puta unutar vanadija. **(1b)**

Druga transmitirana zraka zbog dvije refleksije ima amplitudu

$$T\,R\exp(i\frac{2\pi}{\lambda}\frac{3l}{\cos\theta}-i\frac{2\pi}{\lambda}\cdot 2l\tan\theta\sin\theta)$$ **.(1b)**

Slika. **(2b)**

Susjedne zrake se međusobno razlikuju za fazni pomak $\delta=\frac{2\pi}{\lambda}(\frac{2l}{\cos\theta}-2l\tan\theta\sin\theta)=2\frac{2\pi}{\lambda}l\cos\theta$. **(2b)**

Amplituda m-te zrake je $A_m=A_0R^m\exp(im\delta)$, gdje je A_0 amplituda prve. Ukupna amplituda je zbroj svih njih: $A=\Sigma_{m=0}^{\infty}A_0R^m\exp(im\delta)=A_0\frac{1}{1-R\exp(i\delta)}$. **(2b)**

Intenzitet je $\frac{I}{I_0}=A\bar{A}=\frac{T^2}{1+R^2-2R\cos\delta}$, gdje je δ izveden tri retka ranije. **(2b)**

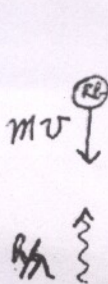
Intenzitet je maksimalan za $\delta=2k\pi$ (k je cijeli broj) i tada iznosi $\frac{I}{I_0}=\frac{T^2}{(1-R)^2}$. To je 1 jer je $R+T=1$, što znači da pod kutom θ određenim s δ izlazi sav intenzitet upadne zrake. **(3b)**

Uvjet za maksimum raspiše se kao $k\lambda=2l\cos\theta$ pa je kut dan s $\cos\theta=\frac{\lambda}{2l}k$. **(1b)**

Najbliži stjenkama su oni snopovi s najvećim k koji je određen s $k_{MAX}=\frac{2l}{\lambda}$ = 75,8. **(2b)**

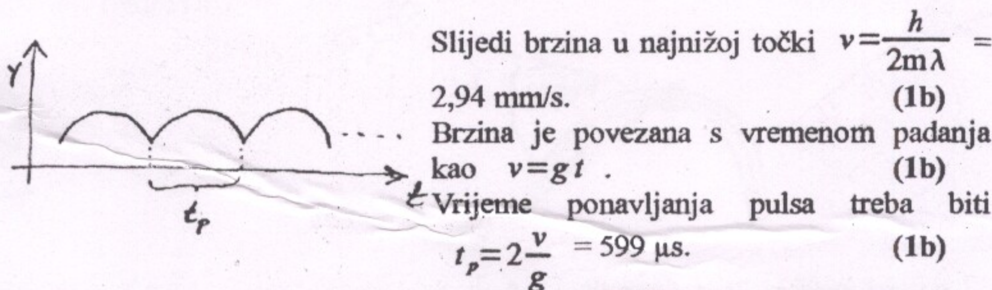
Dva najmanja kuta su $\theta(k=75)$ = 8,55° i $\theta(k=74)$ = 12,66°. **(1b)**

4. zadatak (10 bodova)



Atom apsorbira foton prilagođen energiji prijelaza pa je sudar neelastičan. **(1b)**

Zakon očuvanja količine gibanja u vertikalnom smjeru u trenutku sudara daje $-mv+\frac{h}{\lambda}=mv$ jer se atom mora odbiti istom brzinom kojom je došao da bi gibanje bilo periodično. **(2b)**



Slijedi brzina u najnižoj točki $v=\frac{h}{2m\lambda}$ = 2,94 mm/s. **(1b)**

Brzina je povezana s vremenom padanja kao $v=gt$. **(1b)**

Vrijeme ponavljanja pulsa treba biti $t_p=2\frac{v}{g}$ = 599 μs. **(1b)**

Atom putujući prema fotonu vidi malo povećanu frekvenciju $f'=f\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$. Slijedi $\Delta f/f=10^{-11}$. **(1b)**

Da bi toliki pomak smetao apsorpciji fotona, energijska širina stanja u atomu bi trebala biti manja od $\Delta E/E=10^{-11}$, što daje $\Delta E=h\frac{c}{\lambda}\cdot 10^{-11}$ = $2{,}55\cdot 10^{-30}$J. **(1b)**

Iz načela neodređenosti slijedi da bi vrijeme poluživota pobuđenog stanja elektrona u atomu trebalo biti $\Delta\tau\geq\frac{h}{2\Delta E}$ = 130μs. **(1b)**

Budući da su karakteristična vremena u atomima 10^{-7} s, to Dopplerov pomak očito ne smeta apsorpciji. **(1b)**

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Biograd na Moru, 2.-5. svibnja 2013.

Srednje škole - 4. grupa

1. zadatak (18 bodova)

Paralelan snop svjetlosti upada okomito na planparalelnu prozirnu kružnu pločicu te nakon prolaska kroz nju biva fokusiran u jednu točku, koju možete nazvati žarište iako se ne radi o lomu kakav se odvija kod leće. Fokusiranje se postiže time što se indeks loma pločice mijenja od središta prema rubu pločice, i to tako da ovisi samo o udaljenosti od osi kružne pločice.
a) Debljina pločice je h = 2mm, polumjer R, a žarišna daljina f. Izvedi izraz za ovisnost indeksa loma pločice n o udaljenosti r od njenog središta! Uzmi da je pločica mnogo tanja od svog polumjera, i da je žarište mnogo dalje nego što su dimenzije pločice, što će znatno pojednostavniti razmatranje širenja svjetlosti kroz pločicu, ali i konačan izraz. Izračunaj f znajući da na r = 5mm gradijent indeksa loma pločice ($|dn/dr|$) iznosi 0,025mm^{-1} !
b) Na zadanu pločicu prislonjena je plankonkavna leća žarišne daljine 30cm tako da im se osi podudaraju. Maleni predmet stavljen je na udaljenost 30cm od pločice. Gdje će biti slika predmeta proizvedena optičkim sustavom pločica-leća? Gdje se sve može staviti predmet da bi slika još uvijek bila realna?

2. zadatak (17 bodova)

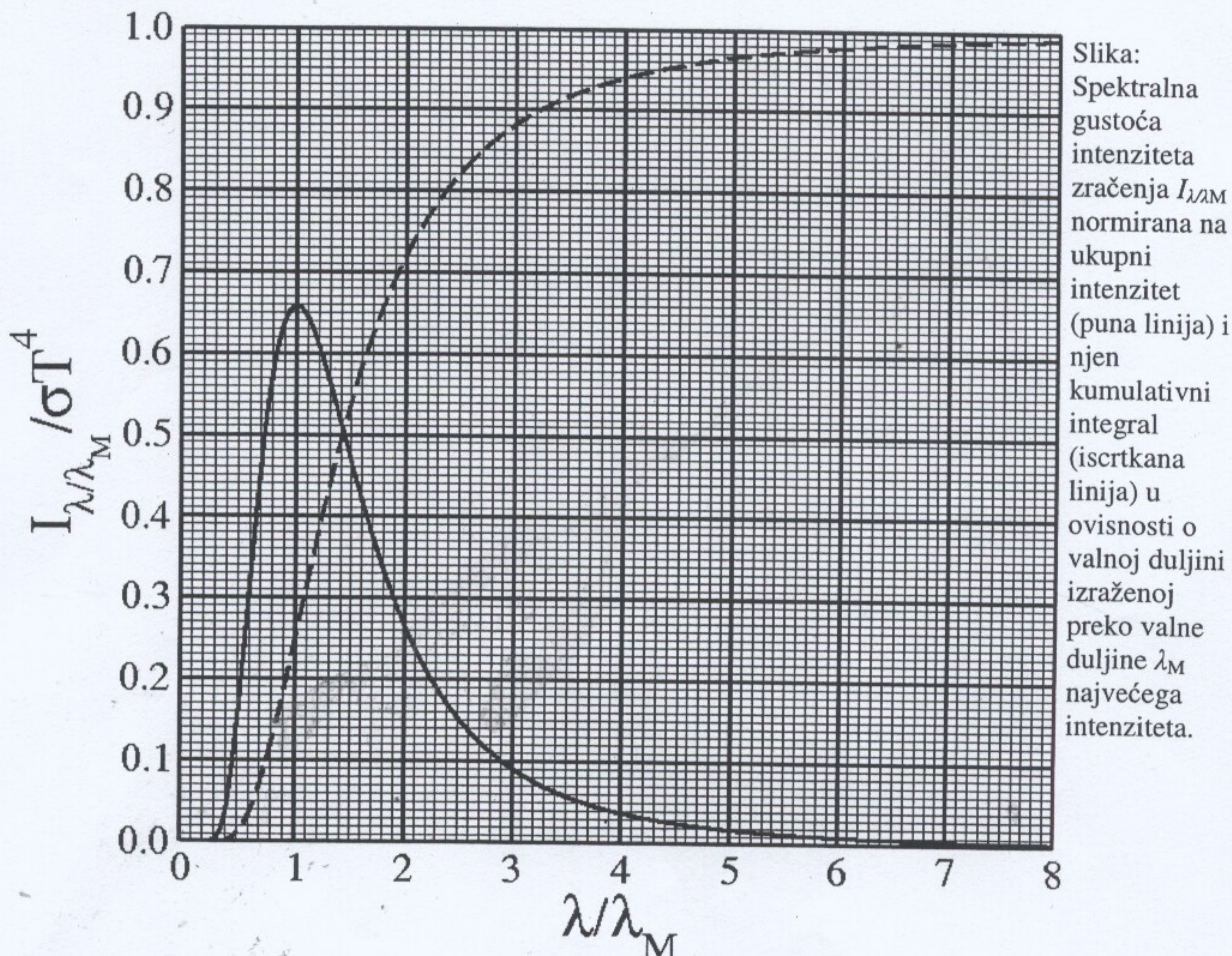
Meteorološki radar na avionu ima 15 međusobno paralelnih vertikalnih štapnih antena poredanih duž smjera leta s međusobnim razmakom 2cm. Svaka od antena zrači koherentne radio valove frekvencije 8,8 GHz jednoliko u svim smjerovima u horizontalnoj ravnini. Relativna faza δ između titranja u susjednim antenama može se mijenjati elektroničkim putem. Pokaži da za δ=0 ovaj skup antena najjače zrači samo u smjeru okomitom na pravac na kojem su antene! Pod kojim kutom sustav zrači maksimalni intenzitet ako je $\delta \neq 0$? Koje vrijednosti mora poprimati δ da bi maksimum radarskog snopa prebrisao kut 45° na lijevo i desno od pravca leta? Koliko je puta intenzitet snopa u smjeru maksimuma kojeg proizvodi ovih 15 antena veći od onog koji bi na istoj (dalekoj) udaljenosti proizvela jedna takva usamljena antena napajana istom snagom kao ovih 15 antena zajedno?

3. zadatak (18 bodova)

a) U nuklearnoj reakciji $^{16}O + {}^{54}Fe \rightarrow {}^{12}C + {}^{58}Ni$ dolazi do prijenosa α-čestice s jezgre kisika na jezgru željeza pa nastaje jezgra nikla u pobuđenom stanju, pri čemu se nastala jezgra ^{12}C giba istom brzinom (i iznos i smjer) kao i jezgra ^{16}O prije reakcije, dok je jezgra željeza prije reakcije mirovala. Mase mirovanja navedenih jezgara su m_O=15.99491u, m_{Fe}=53.93962u, m_C=12.00000u, m_{Ni}=57.93535u. Kinetička energija dolazeće jezgre ^{16}O je 50 MeV. Treba li raditi relativistički račun i zašto? Kolika je energija pobuđenog stanja jezgre nikla?
b) Jezgra nikla iz pobuđenog stanja prelazi u osnovno stanje emitiranjem γ-fotona. Promotri taj proces u sustavu mirovanja pobuđene jezgre nikla i izračunaj kinetičku energiju jezgre i frekvenciju nastalog fotona u istom sustavu nakon emisije! Kolika je frekvencija tog istog fotona u laboratorijskom sustavu gdje detektor miruje i opaža fotone koji mu dolaze u susret?

4. zadatak (17 bodova)

Plavi divovi su zvijezde koje se nakon eksplozije pretvaraju u crne rupe. Temperatura površine tipičnoga plavog diva je 30000K. Vidljivi sjaj, t.j. snaga izračena u okolinu u području vidljive svjetlosti (valna duljina od 400nm do 700nm), mu je 100000 puta veći od vidljivog sjaja Sunca. Polumjer Sunca je $6{,}96\cdot 10^5$km, a ono sveukupno zrači snagu $3{,}86\cdot 10^{26}$W. Pretpostavi da plavi div i Sunce zrače kao crno tijelo. Pri kojoj valnoj duljini plavi div zrači najveći intenzitet te zašto se zove "plavi"? Kolika je temperatura površine Sunca i zašto ga ne možemo nazvati "plavim"? Koliki je polumjer opisanoga plavog diva? Je li općenito ispravno govoriti da je vidljivi sjaj proporcionalan ukupnoj zračenoj snazi, te pokaži to na ovom primjeru!



Slika: Spektralna gustoća intenziteta zračenja $I_{\lambda/\lambda M}$ normirana na ukupni intenzitet (puna linija) i njen kumulativni integral (iscrtkana linija) u ovisnosti o valnoj duljini izraženoj preko valne duljine λ_M najvećega intenziteta.

Koristan izraz:

$(1+x)^n \approx 1+nx$ za $x<<1$

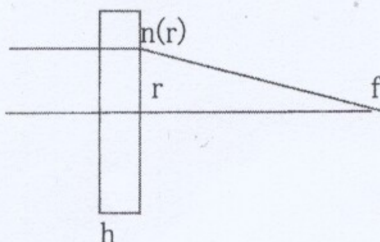
Konstante:

- brzina svjetlosti $c=3\cdot 10^8$ m/s
- Planckova konstanta $h=6{,}626\cdot 10^{-34}$ Js
- Boltzmannova konstanta $k_B=1{,}38\cdot 10^{-23}$ J/K
- elementarni naboj $e=1{,}6\cdot 10^{-19}$ C
- unificirana atomska jedinica mase $u=1{,}66056\cdot 10^{-27}$ kg
- Stefan-Boltzmannova konstanta $\sigma=5{,}67\cdot 10^{-8}$W/m^{2}K
- Wienova konstanta $C=0{,}0029$Km

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Biograd na Moru, 2.-5. svibnja 2013.

Srednje škole - 4. grupa – Rješenja i bodovanje

1. zadatak (18 bodova)



a) Za dvije bliske dolazne zrake fokusiranje u istu točku dogodit će se ukoliko one stižu u nju istovremeno, da bi se snop mogao kontinuirano širiti. **(1 b.)**

Izjednačavanjem vremena dolaska zrake koja prolazi kroz sredinu pločice i zrake koja prolazi pločicom na udaljenosti r od središta u zajedničku točku f dobije se

$$\frac{h}{\frac{c}{n(r)}}+\frac{\sqrt{r^2+f^2}}{c}=\frac{h}{\frac{c}{n(0)}}+\frac{f}{c}$$. **(3 b.)**

Nakon sređivanja slijedi $n(r)=n(0)+\frac{f}{h}\left(1-\sqrt{1+\frac{r^2}{f^2}}\right)$. **(2 b.)**

Za zrake bliske osi je $r<<f$ pa se može zapisati $n(r)=n(0)-\frac{r^2}{2hf}$. **(1 b.)**

Promjena indeksa loma po jedinici udaljenosti je $\frac{dn}{dr}=\frac{-r}{hf}$. **(1 b.)**

Iz zadanog gradijenta indeksa loma dn/dr = -0.025/mm pri r = 0,5cm te debljine 2mm slijedi žarišna daljina f = 10cm. **(2 b.)**

b) Za prvu (recimo ovu izračunatu) leću jednadžba $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$ daje udaljenost slike od leće b = 15cm. **(2 b.)**

Ukoliko je druga (plankonveksna) leća naslonjena na prvu, udaljenost među njima možemo zanemariti pa je predmet udaljen od druge leće c = -15cm (negativno jer se nalazi s druge, "krive", strane). **(2 b.)**

Sad jednadžba druge leće $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{f'}$ daje d = 30cm što znači da je slika na desnoj strani i realna. **(2 b.)**

Žarišna daljina kombinacije dviju leća izražena je s $\frac{1}{F}=\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}$ iz čega je F = 15cm pa slijedi da će realna slika biti ostvarena ako je udaljenost predmeta od pločice veća od 15 cm. **(2 b.)**

2. zadatak (17 bodova)

Slika: **(1 b.)**

Zrake pod kutom θ interferirat će konstruktivno za $d\sin\theta - \frac{\delta}{2\pi}\lambda = k\lambda$, gdje je d razmak među susjednim antenama, δ razlika faze susjednih antena, a $k\lambda$ cjelobrojni višekratnik valne duljine. **(3 b.)**

Radarski snop imat će maksimum pod kutem $\sin\theta = \frac{k\lambda}{d} + \frac{\delta\lambda}{2\pi d}$. **(1 b.)**

Za $\delta = 0$ uz $d < \lambda$ jedino rješenje dobije se za $k = 0$ i ono iznosi $\sin\theta = 0$. **(2 b.)**

Za općeniti δ potrebno je namjestiti k tako da je $|\sin\theta| \le 1$. **(1 b.)**

Za $k = 0$ kut maksimuma je $\theta = \arcsin\frac{\delta\lambda}{2\pi d}$. **(2 b.)**

Uz zadane $f = 8{,}8\cdot10^9$ Hz, $\lambda = \frac{c}{f} = 3{,}41$ cm, i $d = 2$ cm, maksimum pod kutom $\theta = 45°$ dobije se za $\delta = \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta = 2{,}6$ rad. **(3 b.)**

Da bi maksimum prebrisao kut θ od −45° do 45° stupnjeva, faza δ mora se mijenjati od -2,6rad do 2,6rad. **(1 b.)**

Intenzitet je kvadrat amplitude. U slučaju konstruktivne interferencije amplituda je $15A_0$, pa je intenzitet $15^2 I_0$. U slučaju kad jedna antena zrači sav intenzitet, on iznosi $15I_0$. Stoga je traženi omjer 15. **(3 b.)**

3. zadatak (18 bodova)

a) Promjena mase u reakciji je Δm=57,93535u+12,00000u-53,93962u-15,99491u=0,00082u= 1,3616$\cdot 10^{-30}$kg. **(1 b.)**

Promjena kinetičke energije zbog reakcije je stoga $\Delta K = -\Delta mc^2 = -1{,}2237\cdot 10^{-13}$J = -0,761MeV. **(1 b.)**

Budući da su kinetička energija dolazne jezgre i dobivena energija mnogo manje od energije mirovanja, račun se može provoditi nerelativistički (relativistički bi dao isti rezultat uz malo više računa). **(1 b.)**

Za jednodimenzionalan sudar očuvanje količine gibanja glasi $m_O \cdot v_O = m_C \cdot v_C + m_{Ni} \cdot v_{Ni}$. **(1 b.)**

Zakon očuvanja energije je $K_O + \Delta K = K_C + K_{Ni} + E_{Ni}$, gdje je E_{Ni} energija pobuđenja jezgre nikla. **(2 b.)**

Budući da je $v_O = v_C$, količina gibanja nikla iznosi $m_{Ni} \cdot v_{Ni} = (m_O - m_C) \cdot v_O$ pa je kinetička energija

$$K_{Ni} = \frac{(m_O - m_C)^2 v_O^2}{2 m_{Ni}} = K_O \frac{(m_O - m_C)^2}{m_{Ni} m_O} = 0{,}8611\text{MeV}.$$ **(1 b.)**

Uvrštavanjem u zakon očuvanja energije slijedi energija pobuđenja jezgre nikla

$$E_{Ni} = \Delta K + K_O + K_O \frac{(m_O - m_C)^2}{m_{Ni} m_O} - \frac{m_C v_C^2}{2},$$

što zbog $v_O = v_C$ postaje

$$E_{Ni} = \Delta K + K_O \frac{(m_O - m_C)(m_{Ni} - m_O + m_C)}{m_{Ni} m_O}.$$ **(2 b.)**

Uvrštavanjem zadanih podataka i energije reakcije dobije se E_{Ni} = 10,866 MeV. **(1 b.)**

b) U sustavu mirovanja pobuđene jezgre zakon očuvanja energije je $E_{Ni} = E_f + K'_{Ni}$, gdje je K'_{Ni} kinetička energija odbijene jezgre nikla. Zakon očuvanja količine gibanja $p_f = p'_{Ni}$, pri čemu je za foton $E_f = cp_f$. **(1 b.)**

Energije su nerelativističkih iznosa pa je $K'_{Ni} = \frac{E_f^2}{2 m_{Ni} c^2}$ što daje $E_{Ni} = E_f + \frac{E_f^2}{2 m_{Ni} c^2}$. **(1 b.)**

Pozitivno rješenje ove kvadratne jednadžbe je $E_f = \sqrt{m_{Ni}^2 c^4 + 2 m_{Ni} c^2 E_{Ni}} - m_{Ni} c^2$. **(1 b.)**

Uvrštavanjem podataka dobije se E_f = 10,8649 MeV , što znači da je frekvencija fotona u mirujućem sustavu f_0=2,6236$\cdot 10^{21}$Hz. Za kinetičku energiju odbijene jezgre dobije se K'_{Ni} =1,1keV<<E_f. **(2 b.)**

Zbog gibanja fotona prema detektoru, odnosno približavanja detektora fotonu relativnom brzinom v_{Ni}, frekvencija fotona koju mjeri detektor je $f_{detekt} = f_0 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$. **(1 b.)**

Treba uzeti $v = v_{Ni}$ = 0.00565c, pa se dobije f_{detekt} = 2,6385$\cdot 10^{21}$Hz. **(2 b.)**

4. zadatak (17 bodova)

Valna duljina pri kojoj plavi div zrači najvećim intenzitetom dobije se iz Wienova zakona $\lambda_{MD}=\frac{C}{T_D}=96{,}7$ nm, gdje je C Wienova konstanta, a T_D temperatura površine. **(1 b.)**

Zvijezda se naziva plavim divom zato jer je od vidljivog spektra najintenzivnije zastupljen plavi dio. **(1 b.)**

Kuglasto tijelo polumjera R temperature T zrači snagu $P=4\pi R^2\sigma T^4$, gdje je σ Stefan-Boltzmann konstanta. **(1 b.)**

Temperatura površine Sunca je $T_S=\sqrt[4]{\frac{P_S}{4\pi R_S^2\sigma}}=5784$ K. **(1 b.)**

Valna duljina pri kojoj Sunce zrači najintenzivnije je $\lambda_{MS}=\frac{C}{T_S}=501$ nm, što odgovara žutoj boji. **(2 b.)**

Ako je u udio intenziteta zračenja unutar vidljivog dijela spektra u ukupnom intenzitetu, onda prema uvjetu zadatka možemo pisati $P_D u_D=100000\cdot P_S u_S$. **(2 b.)**

Sa slike uz zadatak očitamo površinu ispod krivulje gustoće intenziteta s granicama od 400nm do 700nm. Za Sunce to odgovara od 0,8 λ_{MS} do 1,4 λ_{MS}, a za plavi div od 4,14 λ_{MD} do 7,24 λ_{MD}. Dobije se u_S=0,493−0,131=0,362 i u_D=0,987−0,947=0,040. **(4 b.)**

Slijedi $R_D=R_S\left(\frac{T_S}{T_D}\right)^2\cdot 10^{5/2}\left(\frac{u_S}{u_D}\right)^{1/2}$ $=35{,}4\cdot R_S=2{,}46\cdot 10^{10}$m. **(3 b.)**

Vidljivi sjaj je $P_V=uP$, a budući da u ovisi o temperaturi s kojom se pomiče položaj λ_M s obzirom na granice vidljivog spektra, to vidljivi sjaj nije proporcionalan ukupnoj izračenoj snazi. **(2 b.)**

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA

Stubičke Toplice, 5.-8. svibnja 2014.

Srednje škole - 4. grupa

1. zadatak (20 bodova)

Na male predmete može se djelovati silom osvjetljavajući ih nehomogenim laserskim svjetlom, što se često koristi i u biofizici kada na željena mjesta u primjerice stanicama treba postaviti ili pomicati prozirne sitne predmete. Proučite taj koncept računajući silu na uspravnu trostranu prizmu čija je visina b=1mm, a baza jednakokračan trokut čiji je tupi kut 120° i najdulja stranica $2h$=0,02mm. Prizma je od stakla gustoće 2,5g/cm^3 i indeksa loma n=1,5 te se nalazi u zraku indeksa loma 1. Premazana je antirefleksijskim slojem koji osigurava da sva svjetlost prolazi lomeći se bez refleksije. Postavljena je svojom visinom b u horizontalnom smjeru, a stranica $2h$ je u vertikalnom. Laserski snop širi se u horizontalnom smjeru i upada okomito na visinu b na stranu na kojoj je tupi kut, a dimenzije snopa su 1mm u horizontalnom smjeru i 0,08mm u vertikalnom smjeru. Intenzitet laserskog snopa u njegovom središtu je najveći i iznosi I_0, a s udaljenosti od sredine u vertikalnom smjeru opada linearno tako da na udaljenosti $4h$ i $-4h$ pada na nulu, dok mu se u horizontalnom smjeru intenzitet ne mijenja.

a) Izvedi izraz za horizontalnu i vertikalnu komponentu svjetlosne sile na prizmu u ovisnosti o vertikalnom pomaku brida uz tupi kut prizme za y (y<$3h$) od središta snopa i skiciraj te ovisnosti!

b) Kolika je potrebna snaga snopa da bi se prizmu držalo u gravitacijskom polju Zemlje jakosti g=9,81m/s^2 kada je njen brid uz tupi kut pomaknut prema dolje na udaljenost y=-h/2=-0,005mm od središta laserskog snopa.

c) Kako biste drugim laserskim snopom na najjednostavniji način uravnotežili horizontalnu svjetlosnu silu ne utječući na vertikalnu? Ne treba računati, nego samo obrazložiti.

2. zadatak (18 bodova)

Okretanjem kristalića bakra mjeri se ovisnost intenziteta difraktiranog snopa o kutu pod kojim je obasjana površina i tako snima difrakcijska slika. Valna duljina zračenja je 154,05pm. Prvi se maksimum javlja za kut između upadne zrake i površine od 12°19'.

a) Koliki je razmak među ravninama atoma na kojima se događa ova difrakcija?

b) Prilikom difrakcije na kristalima nanometarskih veličina difrakcijska linija (ovisnost intenziteta o kutu) proširuje se zbog difrakcije na konačnom broju atomskih ravnina. Izračunaj dimenzije kockastog nano-kristala ako je izmjereno da intenzitet postupno padne na nulu tek kad se kut promijeni za 27' s obzirom na položaj razmatranog maksimuma?

c) Drugi razlog širenja difrakcijske linije jest izobličenje kristala. Pretpostavite da je kristal savinut tako da su atomi umjesto u ravnini smješteni na valjkastu plohu (uzmite najjednostavniji slučaj: os valjka okomita je na snop zračenja). Koliki je polumjer zakrivljenosti izobličenja atomskih ravnina ako se istom maksimumu istog nano-kristala difrakcijska linija zbog izobličenja proširi za dodatnih 11' sa svake strane maksimuma.

U nanokristalnim materijalima obično se javljaju proširenja iz oba, ali i drugih razloga, što analizu čini vrlo složenom.

3. zadatak (17 bodova)

Tipična nuklearna elektrana ima korisnost 1/3 i proizvodi električnu snagu 1000MW. Do fisije urana dolazi nakon što jezgra ^{235}U apsorbira spori neutron. Među fisijskim produktima pronađeno je preko 100 različitih nuklida.
a) Napiši jednadžbu reakcije pri kojoj fisijom nastaje jezgra ^{140}Xe te osim druge jezgre nastaju i dva brza neutrona kinetičke energije 1MeV. Zanemarivši početnu brzinu apsorbiranog neutrona izračunaj energiju oslobođenu u jednoj reakciji! Masa jezgre ^{235}U je 235,043923u, jezgre ^{140}Xe 139,921636u, a masa druge nastale jezgre 93,915360u. Vrijeme poluraspada je mnogo dulje od godine dana.
b) Nakon apsorpcije sporog neutrona (prije nego se dalje raspadne na navedeni način) jezgra ^{235}U se mijenja i postaje pobuđena. Kolika je energija pobuđenja novonastale jezgre ako je njena masa u osnovnom stanju 236,045562u i koja je to jezgra?
c) ^{140}Xe nije stabilna jezgra, već se uzastopnim β^- rapadima prevodi do Ce. Napiši jednadžbe tih raspada! Nakon fisije svake jezgre ^{235}U oslobađa se još ukupno 15MeV pri nizu ovih β^- rapada. Dok je fisiju jezgara ^{235}U moguće kontrolirati i zaustaviti ubacivanjem kontrolnih šipki koje apsorbiraju neutrone, ove β^- raspade nije moguće zaustaviti. Kolika se snaga oslobađa u trenutku nakon zaustavljanja fisije urana? Nemogućnost odvođenja tolike snage bila je uzrokom taljenja/zapaljenja reaktora nuklearke *Otok tri milje* 1979., *Černobil* 1986. i *Fukushima* 2011. godine.
d) Kolika je godišnja potrošnja urana u navedenoj elektrani?

4. zadatak (15 bodova)

Higgsov bozon otkriven je prošle godine u sudarima protona visokih energija na velikom hadronskom sudarivaču u CERN-u.
a) U tom sudarivaču protoni su ubrzani na energiju 7 TeV i dva snopa kruže u suprotnim smjerovima po kružnim stazama opsega 27 km. Obrazloži zašto je takav sudar energijski prikladniji za proizvodnju novih čestica nego kad bi snop dvostruko veće energije protona nalijetao na mirujuće protone! Koliko puta u sekundi proton obiđe taj opseg? Svaki snop sadrži 2808 nakupina (*bunch*), a svaki *bunch* sadrži $1.15\cdot10^{11}$ protona. Kolika je energija pohranjena u cijelom prstenu ubrzivača i kolika je električna struja protona u svakom smjeru? Koliko je puta energija ubrzanog protona veća od energije mirovanja? Koliko vremena traje obilazak opsega putanje mjereno u sustavu protona?
b) Tek pri tako visokim energijama mogu se pobuditi određene reakcije među kvarkovima i gluonima protona, te izazvati nastanak Higgsova bozona. Pritom je uočeno da dva nova izletjela protona putuju u suprotnim smjerovima i jednakim iznosima brzina. Higgsov bozon se ne može neposredno detektirati jer se vrlo brzo raspada na mnogo načina. Jedan relativno malo zastupljen, ali za analizu jako važan način je raspad na dva fotona. Precizno je izmjerena količina gibanja fotona $3.33\cdot10^{-17}$ kgms^{-1}. Kolika je masa Higgsova bozona u GeV? Ustanovljena je širina energije (neodređenost energije) Higgsova bozona od 4,21 MeV u skladu sa Standardnim modelom elementarnih čestica. Koliko je vrijeme poluraspada Higgsova bozona?

Koristan izraz: $(1+x)^n \approx 1+nx$ za $x<<1$
Konstante:
- brzina svjetlosti $c=3\cdot10^8$ m/s
- Planckova konstanta $h=6{,}626\cdot10^{-34}$ Js
- elementarni naboj $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ C
- masa protona $m_p=1.67262178\cdot10^{-27}$ kg
- masa neutrona $m_n= 1.67492735\cdot10^{-27}$ kg
- masa elektrona $m_e= 9.10938291\cdot10^{-31}$ kg
- unificirana atomska jedinica mase $u=1{,}66056\cdot10^{-27}$ kg

PERIODNI SUSTAV ELEMENATA

http://www.periodni.com/hr/

OZNAČAVANJE SKUPINE IUPAC PREPORUKA (1985.) — 13

OZNAČAVANJE SKUPINE CHEMICAL ABSTRACT SERVICE (1986.) — IIIA

ATOMSKI BROJ — 5

RELATIVNA ATOMSKA MASA (2) — 10.811

SIMBOL — B

NAZIV ELEMENTA (1) — BOR

SKUPINA

PERIODA	1 IA	2 IIA	3 IIIB	4 IVB	5 VB	6 VIB	7 VIIB	8	9 VIIIB	10	11 IB	12 IIB	13 IIIA	14 IVA	15 VA	16 VIA	17 VIIA	18 VIIIA
1	1 1.0079 H VODIK																	2 4.0026 He HELIJ
2	3 6.941 Li LITIJ	4 9.0122 Be BERILIJ											5 10.811 B BOR	6 12.011 C UGLJIK	7 14.007 N DUŠIK	8 15.999 O KISIK	9 18.998 F FLUOR	10 20.180 Ne NEON
3	11 22.990 Na NATRIJ	12 24.305 Mg MAGNEZIJ											13 26.982 Al ALUMINIJ	14 28.086 Si SILICIJ	15 30.974 P FOSFOR	16 32.065 S SUMPOR	17 35.453 Cl KLOR	18 39.948 Ar ARGON
4	19 39.098 K KALIJ	20 40.078 Ca KALCIJ	21 44.956 Sc SKANDIJ	22 47.867 Ti TITANIJ	23 50.942 V VANADIJ	24 51.996 Cr KROM	25 54.938 Mn MANGAN	26 55.845 Fe ŽELJEZO	27 58.933 Co KOBALT	28 58.693 Ni NIKAL	29 63.546 Cu BAKAR	30 65.38 Zn CINK	31 69.723 Ga GALIJ	32 72.64 Ge GERMANIJ	33 74.922 As ARSEN	34 78.96 Se SELENIJ	35 79.904 Br BROM	36 83.798 Kr KRIPTON
5	37 85.468 Rb RUBIDIJ	38 87.62 Sr STRONCIJ	39 88.906 Y ITRIJ	40 91.224 Zr CIRKONIJ	41 92.906 Nb NIOBIJ	42 95.96 Mo MOLIBDEN	43 (98) Tc TEHNECIJ	44 101.07 Ru RUTENIJ	45 102.91 Rh RODIJ	46 106.42 Pd PALADIJ	47 107.87 Ag SREBRO	48 112.41 Cd KADMIJ	49 114.82 In INDIJ	50 118.71 Sn KOSITAR	51 121.76 Sb ANTIMON	52 127.60 Te TELURIJ	53 126.90 I JOD	54 131.29 Xe KSENON
6	55 132.91 Cs CEZIJ	56 137.33 Ba BARIJ	57-71 La-Lu Lantanoidi	72 178.49 Hf HAFNIJ	73 180.95 Ta TANTAL	74 183.84 W VOLFRAM	75 186.21 Re RENIJ	76 190.23 Os OSMIJ	77 192.22 Ir IRIDIJ	78 195.08 Pt PLATINA	79 196.97 Au ZLATO	80 200.59 Hg ŽIVA	81 204.38 Tl TALIJ	82 207.2 Pb OLOVO	83 208.98 Bi BIZMUT	84 (209) Po POLONIJ	85 (210) At ASTAT	86 (222) Rn RADON
7	87 (223) Fr FRANCIJ	88 (226) Ra RADIJ	89-103 Ac-Lr Aktinoidi	104 (267) Rf RUTHERFORDIJ	105 (268) Db DUBNIJ	106 (271) Sg SEABORGIJ	107 (272) Bh BOHRIJ	108 (277) Hs HASSIJ	109 (276) Mt MEITNERIJ	110 (281) Ds DARMSTADTIJ	111 (280) Rg RENDGENIJ	112 (285) Cn KOPERNICIJ	113 (...) Uut UNUNTRIJ	114 (287) Fl FLEROVIJ	115 (...) Uup UNUNPENTIJ	116 (291) Lv LIVERMORIJ	117 (...) Uus UNUNSEPTIJ	118 (...) Uuo UNUNOKTIJ

LANTANOIDI

57 138.91 La LANTAN	58 140.12 Ce CERIJ	59 140.91 Pr PRASEODIMIJ	60 144.24 Nd NEODIMIJ	61 (145) Pm PROMETIJ	62 150.36 Sm SAMARIJ	63 151.96 Eu EUROPIJ	64 157.25 Gd GADOLINIJ	65 158.93 Tb TERBIJ	66 162.50 Dy DISPROZIJ	67 164.93 Ho HOLMIJ	68 167.26 Er ERBIJ	69 168.93 Tm TULIJ	70 173.05 Yb ITERBIJ	71 174.97 Lu LUTECIJ

AKTINOIDI

89 (227) Ac AKTINIJ	90 232.04 Th TORIJ	91 231.04 Pa PROTAKTINIJ	92 238.03 U URANIJ	93 (237) Np NEPTUNIJ	94 (244) Pu PLUTONIJ	95 (243) Am AMERICIJ	96 (247) Cm KURIJ	97 (247) Bk BERKELIJ	98 (251) Cf KALIFORNIJ	99 (252) Es EINSTEINIJ	100 (257) Fm FERMIJ	101 (258) Md MENDELEVIJ	102 (259) No NOBELIJ	103 (262) Lr LAWRENCIJ

(1) Hrvatska nomenklatura anorganske kemije, ed. V. Simeon, Školska knjiga, Zagreb, 1996.

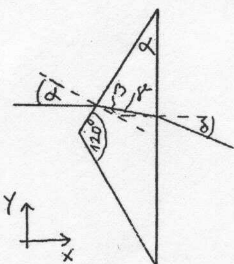
(2) Pure Appl. Chem., 81, No. 11, 2131-2156 (2009) Relativne atomske mase izražene su s pet značajnih znamenki. Za elemente koji nemaju stabilnih nuklida u zagradama je dan maseni broj najstabilnijeg izotopa. Izuzetak su torij, protaktinij i uranij koji imaju karakterističan izotopski sastav na Zemlji.

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA

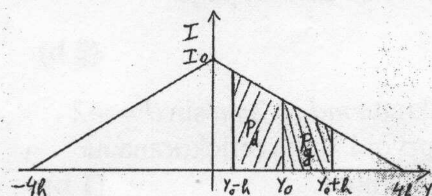
Stubičke Toplice, 5.-8. svibnja 2014.

Srednje škole - 4. grupa – Rješenja i bodovanje

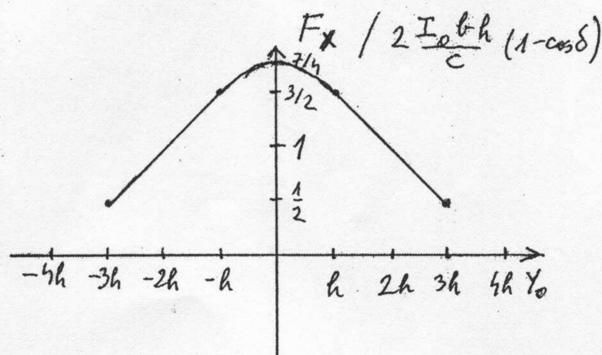
1. zadatak (20 bodova)



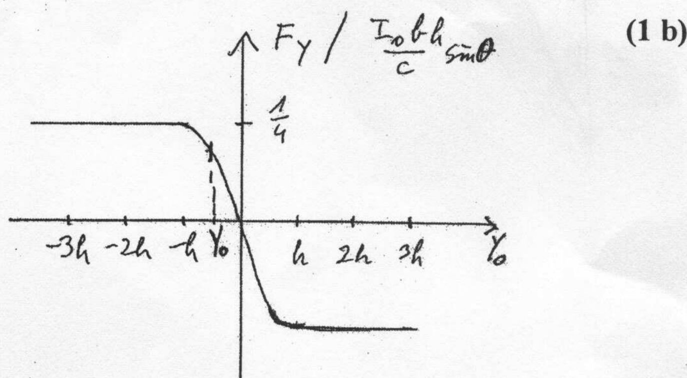
a) Prijenos impulsa sile ovisi o kutu skretanja svjetlosti. Iz zakona loma $n\sin\beta = \sin\alpha$, gdje je kut upada na staklo α jednak šiljastom kutu prizme 30º, slijedi β=19,47º pa je kut upada na drugu plohu $\gamma = \alpha - \beta$=10.53º iz čega se dobije kut δ=15.9º, što je ujedno i ukupni kut skretanja zrake. **(1 b)**
U jedinici vremena dolazi n fotona količine gibanja E/c, a izlazna količina gibanja mu je $E/c\cdot\cos\delta$ u horizontalnom i $-E/c\cdot\sin\delta$ u vertikalnom smjeru. **(1 b)**
Snaga kojom je obasjana gornja polovica prizme je $P_g = n\cdot E$, **(1 b)**
pa je sila na gornji dio prizme (suprotna od promjene količine gibanja fotona) $\mathbf{F}_g = P_g/c((1-\cos\delta)\ \mathbf{i} + \sin\delta\ \mathbf{j})$. **(1 b)**
Analogno je na donji dio prizme $\mathbf{F}_d = P_d/c((1-\cos\delta)\ \mathbf{i} - \sin\delta\ \mathbf{j})$. **(1 b)**
Ukupna je sila $\mathbf{F} = [(P_g+P_d)(1-\cos\delta)\ \mathbf{i} + (P_g-P_d)\sin\delta\ \mathbf{j}]/c$. **(1 b)**



Doprinos upadne snage na element površine ΔS je $\Delta P = I\cdot\Delta S = I\cdot b\Delta y$. Ukupna snaga $b\sum I\cdot\Delta y$ je ustvari površina trapeza u $I(y)$ grafu pomnožena s b. Budući da intenzitet nije homogen, potrebno je uzeti ovisnost intenziteta o y zadanu kao $I = I_0(1-y/4h)$ za $0\le y\le 4h$ i $I = I_0(1+y/4h)$ za $-4h\le y\le 0$. **(1 b)**
Vrh prizme pomaknut je za y_0 od osi laserskog snopa.
Za slučaj da je cijela prizma u gornjem dijelu snopa ($h\le y_0\le 3h$):



$P_g = b\cdot I(y_0+h/2)\cdot h = bhI_0(7/8-y_0/4h)$ i **(1 b)**
$P_d = b\cdot I(y_0-h/2)\cdot h = bhI_0(9/8-y_0/4h)$, pa je sila **(1 b)**
$F_x = 2bhI_0(1-y_0/4h)(1-\cos\delta)/c$ i $F_y = -bhI_0\sin\delta/4c$. **(1 b)**
Za slučaj da je dio donjeg dijela prizme u donjem dijelu snopa ($0\le y_0\le h$):
$P_g = b\cdot I(y_0+h/2)\cdot h = bhI_0(7/8-y_0/4h)$, **(1 b)**
dok P_d rastavljamo na dijelove koji dolaze od gornjeg dijela snopa i donjeg dijela snopa:
$P_d = P_{dg} + P_{dd} = b\cdot I(y_0/2)\cdot y_0 + b\cdot I((h-y_0)/2)\cdot(h-y_0) = b\cdot y_0\cdot I_0\cdot(1-y_0/8h) + b\cdot(h-y_0)\cdot I_0\cdot(1-(h-y_0)/8h) =$
$b\cdot h\cdot I_0\cdot(7/8 + y_0/4h - y_0^2/4h^2)$ **(1 b)**
Sila je $F_x = bhI_0(7/4 - y_0^2/4h^2)(1-\cos\delta)/c$ i $F_y = -bhI_0\cdot(y_0/2h)\cdot(1-y_0/2h)\cdot\sin\delta/c$. **(1 b)**



(1 b)

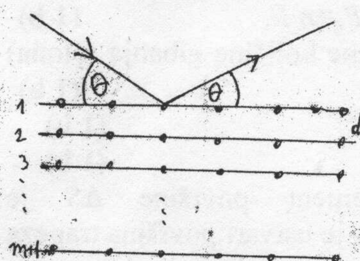
b) Za negativne pomake y_0 rješenje je simetrično ovome gore, pa izračunamo F_y ($y_0=h/2$) i uzmemo obrnut predznak. Tako je $F_y = bhI_0\cdot(1/4)\cdot(1-1/4)\cdot\sin\delta/c$. **(2 b)**

Težina prizme je $mg=\rho Vg=\rho\cdot g\cdot b\cdot h\cdot h\cdot \mathrm{tg}30^{o}=1{,}42\cdot 10^{-9}$N, što treba izjednačiti s F_y pa se dobije $I_0=16mgc/3bh\sin\delta=8.27\cdot 10^{8}\mathrm{W/m^2}$. **(1 b)**

Srednji intenzitet je $I_0/2$ pa je ukupna snaga $P=I_0/2\cdot b\cdot 8h=33{,}08$W **(1 b)**

c) Horizontalna sila može se uravnotežiti homogenim horizontalnim snopom iz suprotnog smjera jer on neće proizvesti vertikalnu silu koliku god horizontalnu proizvodili podešavanjem intenziteta. **(2 b)**

2. zadatak (18 bodova)



a) Braggova jednadžba glasi $2d\sin\theta = k\lambda$, gdje je λ valna duljina zračenja, d je razmak među ravninama, a θ kut između upadne zrake i površine. **(2 b)**

Maksimum pod najmanjim kutem pojavit će se za k=1, pa je

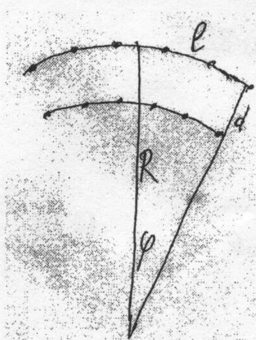
$$d = \frac{\lambda}{2\sin\theta} = 361{,}0\text{pm}$$ **(2 b)**

b) Za prvi maksimum je $2d\sin\theta = \lambda$. Pri istom kutu za ravnine razmaknute md je $2md\sin\theta = m\lambda$. Ako je m ukupni broj razmaka među ravninama, zraka reflektirana na prvoj i zraka reflektirana na zadnjoj ravnini stoga također doprinose Braggovu maksimumu pri istom kutu. **(1 b)**

Prvi minimum pri kutu $\theta+\Delta\theta$ javlja se kada se zrake s prve i zadnje ravnine razlikuju dodatno za λ, tj. kada je $2md\sin(\theta+\Delta\theta) = m\lambda + \lambda$ jer će tada prva zraka sa zrakom reflektiranom na polovici debljine interferirati destruktivno budući da se razlikuju u putu za $\lambda/2$, a isto tako će destruktivno interferirati sve zrake iz gornje polovice kristala s pripadnom zrakom iz donje polovice. **(4 b)**

Oduzimanjem te dvije jednadžbe dobije se $2md(\sin(\theta+\Delta\theta) - \sin\theta) = \lambda$, a za $\Delta\theta << \theta$ je izraz u zagradi $\Delta\theta\cos\theta$, gdje je $\Delta\theta=0{,}00785$rad **(1 b)**

Stoga je debljina (dimenzija) kristalića $D = md = \dfrac{\lambda}{2\Delta\theta\cos\theta}$ =10,04nm. **(3 b)**



c) Okretanjem kristala za φ na obje strane događat će se još uvijek difrakcija, pa polovica duljine nano-kristala daje luk l povezan s polumjerom zakrivljenosti R, tako da je $l=R\,\varphi$, gdje je φ=0,0032rad. Stoga je polumjer $R=l/\varphi=D/2\varphi$=1569nm. **(5 b)**

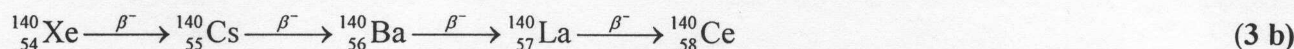
3. zadatak (17 bodova)

a) Jednadžba fisije: ${}^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{140}_{54}\mathrm{Xe} + {}^{94}_{38}\mathrm{Sr} + 2{}^{1}_{0}\mathrm{n}$ **(2 b)**

Oslobođena energija: $\Delta E = (m_{\mathrm{U}} + m_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{Xe}} - m_{\mathrm{Sr}} - 2m_{\mathrm{n}})c^2 = 2{,}96 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{J} = 185\mathrm{MeV}$ **(2 b)**

b) Apsorpcija neutrona: ${}^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{236}_{92}\mathrm{U}^{*}$, gdje * označava da je nastala pobuđena jezgra energije više od energije osnovnog stanja za iznos energije pobuđenja koja prema zakonu očuvanja energije iznosi $E^{*} = (m_{\mathrm{U235}} + m_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{U236}})c^2 = 1{,}05 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J} = 6{,}563\mathrm{MeV}$, gdje su m_{U235} i m_{U236} mase nepobuđenih jezgara. **(4 b)**

c) Niz β^{-} raspada od Xe do Ce:



${}^{140}_{54}\mathrm{Xe} \xrightarrow{\beta^-} {}^{140}_{55}\mathrm{Cs} \xrightarrow{\beta^-} {}^{140}_{56}\mathrm{Ba} \xrightarrow{\beta^-} {}^{140}_{57}\mathrm{La} \xrightarrow{\beta^-} {}^{140}_{58}\mathrm{Ce}$ **(3 b)**

Odnos snage oslobođene β^{-} raspadima i ukupne oslobođene snage je $\frac{P_\beta}{P} = \frac{15\mathrm{MeV}}{(15+185)\mathrm{MeV}}$ gdje je 15MeV energija oslobođena u jednom nizu β^{-} raspada, a (15+185)MeV ukupna energija oslobođena fisijom jedne jezgre urana i β^{-} raspadima. **(2 b)**

Slijedi $P_\beta = \frac{15}{200}P = \frac{15}{200} \cdot 3000\mathrm{MW} = 225\mathrm{MW}$, gdje je 3000MW izračunato iz proizvedene električne snage od 1000MW uz korisnost 1/3. **(2 b)**

d) Broj jezgara urana raspadnutih u godinu dana je $\frac{3000\mathrm{MW} \cdot 1\mathrm{god}}{200\mathrm{MeV}} = 2{,}96 \cdot 10^{27}$ **(1 b)**

Masa tih jezgara je $2{,}96 \cdot 10^{27} \cdot 235{,}0439u = 1155\mathrm{kg}$. **(1 b)**

4. zadatak (15 bodova)

a) Sudar u kojem središte mase miruje ima najveću energiju na raspolaganju za tvorbu novih čestica jer nakon sudara nastale čestice ne moraju odnijeti dio energije putem gibanja. **(2 b)**

Iz $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ dobije se $v \approx c$ (na devet decimalnih mjesta), **(1 b)**

pa je vrijeme obilaska putanje $T = l/v = 90\mu\mathrm{s}$, odnosno 11111 obilazaka u sekundi. **(1 b)**

Ukupna pohranjena energija snopova je 723,3MJ. **(1 b)**

Struja je naboj po jedinici vremena $I = Ne/T = 0{,}204\mathrm{mA}$. **(1 b)**

$E/mc^2 = 7438$. **(1 b)**

Vlastito vrijeme obilaska protona $T' = T\sqrt{1 - v^2/c^2} = T\frac{mc^2}{E} = 90\ \mu\mathrm{s}/7438 = 12{,}1\mathrm{ns}$ **(2 b)**

b) Budući da nastali protoni imaju ukupnu količinu gibanja nula, kao i oni prije reakcije, to znači da Higgsov bozon miruje. **(2 b)**

On se raspada na dva fotona, koji odlete istim količinama gibanja odnosno energijama, pa je energija mirujućeg Higgsova bozona $E_{\mathrm{H}} = 2 \cdot E_{\mathrm{f}} = 2 \cdot p \cdot c = 2 \cdot 10^{-8}\mathrm{J} = 125\mathrm{GeV}$. **(2 b)**

Iz relacije neodređenosti $\tau \cdot \Delta E = \hbar$ slijedi vrijeme poluraspada $\tau = 1.56 \cdot 10^{-22}\mathrm{s}$. **(2 b)**

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Trogir, 11.-14. svibnja 2015.

Srednje škole - 4. grupa

1. zadatak (18 bodova)

Dva zrcala dodiruju se duž zajedničkog brida i reflektirajuće ravnine su im nagnute za malo manje od ispruženog kuta. Laserska zraka svjetlosti valne duljine 632nm, koja je okomita na dodirni brid zrcala i u ravnini okomitoj na oba zrcala, upada pod malim kutom dijelom na bliže zrcalo od kojeg se reflektira polovica zrake, a druga polovica zrake reflektira se od drugog zrcala. Te se dvije zrake nakon refleksije preklapaju u određenom prostoru pa dolazi do njihove interferencije i pojave svijetlih i tamnih pruga na zaslonu koji je gotovo okomit na smjer dolaska snopova svjetlosti. Udaljenost zaslona od brida među zrcalima je 2,850m. Da bismo olakšali izračune i izbjegli probleme s teškim određivanjem malih kutova između dvaju zrcala te zrake i zrcala, interferenciju možemo promatrati kao da je posljedica postojanja dvaju virtualnih izvora iza zrcala. Položaj i međusobni razmak dvaju virtualnih izvora odredimo tako što prilikom umetanja sabirne leće žarišne daljine 30cm na udaljenost 2,600m od zaslona dobijemo na zaslonu oštru realnu sliku dvaju virtualnih izvora i središta tih dviju svijetlih točaka međusobno su udaljena 7.7mm.
a) Koliki je razmak središta dvaju susjednih interferencijskih maksimuma (naravno, kad se leća ukloni)?
b) Koliko se ukupno interferencijskih maksimuma vidi na zaslonu kao posljedica specifične geometrije sustava?

2. zadatak (17 bodova)

Svjetleća dioda napaja se izmjeničnim radiofrekventnim naponom frekvencije 50MHz pa je crvena svjetlost valne duljine 632nm koju dioda emitira modulirana tako da se amplituda svjetlosti mijenja u skladu s naponom.
a) Amplitudno moduliranu svjetlost možemo dobiti i superpozicijom dva monokromatska vala različitih i relativno bliskih frekvencija. Dokažite tu tvrdnju i ujedno izračunajte frekvencije tih dvaju svjetlosnih valova te pokažite kolikom brzinom se širi modulacija svjetlosti kroz vakuum!
b) Zraka takve modulirane svjetlosti izlazi iz diode i dolazi do sustava od dva zrcala te se od njih odbija i malo paralelno pomaknuta vraća nazad do detektorske fotodiode koja se nalazi pored svjetleće diode. Fazni pomak između modulacija poslane zrake s diode i primljene zrake na detektoru može se lako mjeriti osciloskopom. Prilikom udaljavanja para zrcala za 1,49m od diode i detektora dolazi do dodatnog faznog pomaka modulacije između poslane i primljene zrake za π. Kolika je brzina svjetlosti određena ovim eksperimentom?
c) Ovakvim postavom može se mjeriti i indeks loma prozirnog sredstva. Komad stakla u obliku kvadra duljine 30cm stavi se na put odlazne zrake i uoči određeni fazni pomak modulacije između poslane i primljene zrake. Potom se staklo ukloni i zrcala udaljavaju od diode i detektora sve dok se ne uoči isti fazni pomak modulacije kakav je bio dok je staklo bilo na putu. Koliki je indeks loma stakla ako je za to zrcala bilo potrebno pomaknuti za 9,3cm?

3. zadatak (18 bodova)

Postoji i sol NaCl koja je radioaktivna, jer u sebi sadrži jezgre ^{22}Na, ali koja ne postoji prirodno, već se dobiva u reaktorima. Vrijeme poluraspada jezgara ^{22}Na je 2,6 godina, i pri raspadu se emitira pozitron. Nastala jezgra je u pobuđenom stanju i ona nakon 3ps emitira γ-foton energije 1,275MeV i prelazi u osnovno stanje. U procesu u reaktoru dobiveno je 15% radioaktivnih ^{22}Na, dok su ostale stabilne jezgre

^{23}Na. Takav NaCl otopi se odmah u vodi i između dva valjkasta komada ispitnog materijala duljina 10cm kapne se tu otopine i pusti neka voda brzo ispari te se valjci spoje tako da je između njih na sredini ostala radioaktivna sol u čvrstom stanju mase 1μg. Pretpostavite da se fotoni i pozitroni gibaju uglavnom okomito na valjkaste pločice. Na krajeve izvan valjkastih pločica materijala postavljeni su detektori γ-fotona.

a) Napišite jednadžbu reakcije raspada ^{22}Na i izračunajte kinetičku energija pozitrona ukoliko jezgra ostaje na svom mjestu, a poznate su mase jezgre ^{22}Na koja iznosi 21,9944364u i jezgre kćeri u nepobuđenom stanju 21,99138511u. Prosječna masa jezgara Cl je 35,453u i one su stabilne, a stabilnih ^{23}Na 22,9898u.

b) Kolika je aktivnost u početnom trenutku i koliko je vremena potrebno prikupljati podatke da bi se dogodilo 10^9 raspada ^{22}Na?

c) Pozitron putuje kroz materijal efektivnom brzinom koja je 100 puta manja od njegove brzine prilikom nastanka. Pretpostavite da u prosjeku jednom naiđe na nano-šupljinu u istraživanom poroznom materijalu i u toj šupljini se privremeno zadrži te potom nastavi dalje do drugog kraja materijala. Anihilacija pozitrona najčešće se dogodi s elektronom prilikom izlaska iz materijala pri čemu nastaju 2 γ-fotona. Koliko vremena se u prosjeku zadržavaju pozitroni u nano-šupljini ukoliko γ-detektor najčešće bilježi vremenski razmak između dolaska fotona energije 1.275MeV (start-signal mjerača vremena) i 0,911MeV (stop-signal mjerača vremena) od 47ns? Zašto je start-signal navedene energije dobar izbor u ovoj mjernoj metodi?

4. zadatak (17 bodova)

Lasersko hlađenje atoma je učinak pri kojem se atomi razrijeđenog plina usporavaju pomoću laserskog snopa. Energija fotona iz snopa podesi se na nešto nižu vrijednost od energije potrebne za pobuđivanje atoma iz osnovnog stanja u prvo pobuđeno stanje. Tada atom koji se giba ususret fotonu može apsorbirati takav foton, a rezultat je njegovo usporavanje. Nakon toga dolazi do povratka atoma u svoje osnovno stanje. Budući da se atomi u plinu gibaju u svim smjerovima, koristi se više laserskih snopova u različitim smjerovima da bi se sve komponente brzine umanjile te tako dobio plin čiji se atomi gibaju znatno umanjenom brzinom.

Promatrajte atome natrija mase $m=3{,}82\cdot10^{-26}$kg, kod kojih je energija prvog pobuđenog stanja $E=3{,}36\cdot10^{-19}$J iznad osnovnog stanja, a širina tog stanja je $\Gamma=7\cdot10^{-27}$J, što znači da energija može biti u intervalu od $E-\Gamma/2$ do $E+\Gamma/2$. Pri temperaturi 2,3K karakteristična brzina natrijevih atoma u plinu je 50m/s. Pretpostavite da se atom te brzine giba prema snopu svjetlosti.

a) Kolika mora biti valna duljina svjetlosti da bi atom apsorbirao foton?
b) Kolika će biti promjena brzine atoma apsorpcijom fotona?
c) U kojem intervalu mogu biti brzine atoma da bi oni mogli apsorbirati fotone izračunate energije?
d) Nakon koliko vremena se dogodi prijelaz u osnovno stanje te kvalitativno objasnite kako to da je nakon povratka atoma u osnovno stanje i nakon niza takvih procesa ukupna temperatura smanjena!
e) Na koje valne duljine treba podesiti laser kada se na kraju želi doći do 230μK?

Korisni izrazi: $(1+x)^n\approx1+nx$ za $x<<1$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$ i $\cos(x)\sin(y)=(\sin(x+y)-\sin(x-y))/2$

Konstante:

- brzina svjetlosti $c=3\cdot10^8$ m/s
- Planckova konstanta $h=6{,}626\cdot10^{-34}$ Js
- elementarni naboj $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ C
- masa protona $m_p=1.67262178\cdot10^{-27}$ kg

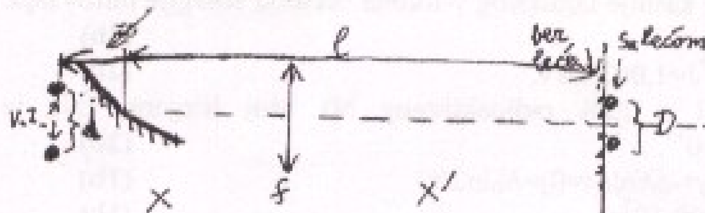
- masa neutrona m_n= $1.67492735 \cdot 10^{-27}$ kg
- masa elektrona m_e= $9.10938291 \cdot 10^{-31}$ kg
- unificirana atomska jedinica mase u=$1,66056 \cdot 10^{-27}$ kg

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA

Trogir, 11.-14. svibnja 2015.

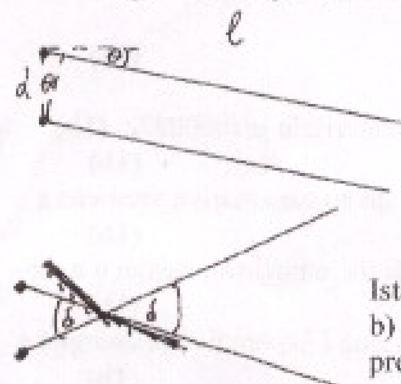
Srednje škole - 4. grupa – Rješenja i bodovanje

1. zadatak (18 bodova)



a) Svako zrcalo stvara jednu virtuanu sliku izvora svjetlosti koje pomoću leće možemo projicirati na zaslon, (slika **(2b)**) pa se iz jednadžbi $\frac{1}{x}+\frac{1}{x'}=\frac{1}{f}$ i $\frac{D}{d}=\frac{x'}{x}$ dobiju njihove udaljenosti od leće x i njihova međusobna udaljenost d. **(2b)**

Iz zadanog x'=2,6m i f=0,3m dobije se x=0,339m te potom d=7,7mm·0,339/2,6 = 1mm. **(2b)**



Uvjet za konstruktivnu interferenciju zraka koje se šire iz dva virtualna izvora je $d\sin\theta = k\lambda$, gdje je θ otklon od horizontale. **(2b)**

Položaj k-tog maksimuma na zaslonu udaljenom $l=x+x'$=2,939m od izvora je $z_k = l\tan\theta_k = k\frac{\lambda l}{d}$ jer je θ mali kut pa je razmak susjednih maksimuma $\Delta z = \frac{\lambda l}{d}$ =1,85mm. **(3b)**

Ista se rješenja dobiju i kada virtualni izvori nisu točno jedan iznad drugog.

b) Interferencija valova iz dvaju izvora može se dogoditi samo gdje se valovi preklapaju u prostoru, a to je unutar kuta δ. **(2b)**

Iz geometrije je $\frac{d}{2} = s\cdot\tan\frac{\delta}{2}$, gdje je udaljenost izvora od brida zrcala s=0,339m-0,25m=0,089m. Slijedi δ=0,644°=0,01123rad. **(2b)**

S druge strane je $\delta\cdot(l-s) = N\cdot\Delta z$ pa je N=17,3 pa je ukupan broj interferencijskih maksimuma 17. **(3b)**

2. zadatak (17 bodova)

a) Valnu funkciju amplitudno modulirane svjetlosti možemo zapisati $E=E_0\cos(\Omega t-Kx)\sin(\omega t-kx)$, gdje je $\Omega=2\pi F=3{,}14\cdot10^8\mathrm{s}^{-1}$, a $\omega=2\pi c/\lambda= 2{,}98\cdot10^{15}\mathrm{s}^{-1}$, te $K=2\pi/\Lambda$ i $k=2\pi/\lambda$. **(2b)**

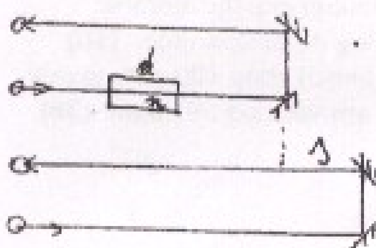
Pomoću formule za umnožak kosinusa i sinusa dobije se

$E=E_0/2\{\sin[(\omega+\Omega)t-(k+K)x]+\sin[(\omega-\Omega)t-(k-K)x]\}$. **(2b)**

Moduliranu svjetlost se dakle može shvatiti kao superpoziciju monokromatskih valova kružne frekvencije $(2{,}98\cdot10^{15}+3{,}14\cdot10^8)\mathrm{s}^{-1}$ i $(2{,}98\cdot10^{15}-3{,}14\cdot10^8)\mathrm{s}^{-1}$. **(2b)**

Za prvi val vrijedi $\omega+\Omega=c\cdot(k+K)$, a za drugi $\omega-\Omega=c\cdot(k-K)$, gdje je c brzina širenja valova to jest brzina svjetlosti, a oduzimanjem te dvije jednakosti dobije se $\Omega=c\cdot K$, što znači da modulacija također putuje brzinom c. **(2b)**

b) Nakon što je zraka modulirane svjetlosti prešla put $2l$, valna funkcija pri povratku u detektor joj je $E=E_0\cos[\Omega t-K(x+2l)]\sin[\omega t-k(x+2l)]$, što zbog stečenog faznog pomaka modulacije za π s obzirom na modulaciju polazne zrake znači da je $2Kl=\pi$. **(2b)**



Uzimanjem $K=2\pi/\Lambda$ i $\Lambda=c/F$ dobije se $c=4Fl=2{,}98\cdot10^8\mathrm{ms}^{-1}$. **(2b)**

c) Prilikom prolaska kroz staklo fazni pomak modulacije je nKd. **(1b)**

Uklanjanjem stakla na tom se putu dogodi fazni pomak Kd, kojemu treba nadodati još i fazni pomak zbog pomicanja zrcala za s koji iznosi $2Ks$, te skupa čine isti pomak kao u slučaju stakla. **(2b)**

Stoga je $nKd=Kd+2Ks$. **(1b)**

Slijedi indeks loma stakla $n=1+2s/d$=1,62. **(1b)**

3. zadatak (18 bodova)

a) ${}^{22}_{11}Na \to {}^{22}_{10}Ne^{*} + e^{+} + \nu_e$ **(1b)**

Jezgra ostaje na mjestu pa se energija dobivena raspadom pretvori u kinetičku energiju pozitrona i energiju pobuđenja jezgre ^{22}Ne koja je za energiju kasnije izračenog γ-fotona veća od energije mirovanja. Stoga možemo pisati $m_{Na}c^2 = m_{Ne}c^2 + E_\gamma + m_e c^2 + K^{+}$. **(2b)**

Odatle je kinetička energija pozitrona $K^{+} = 1{,}7 \cdot 10^{-13}J=1{,}063$MeV. **(2b)**

b) U početnom trenutku u 1μg mase NaCl s 15% radioaktivnog Na broj jezgara ^{22}Na je $N_0 = 0.15 \cdot m/(0{,}15 m_{Na22}u + 0{,}85 m_{Na23}u + m_{Cl}u) = 1{,}55 \cdot 10^{15}$. **(2b)**

Iz $N(t) = N_0(1/2)^{t/\tau}$ dobije se u početnom trenutku $A_0 = -dN/dt(t=0) = N_0 \ln 2/\tau$. **(1b)**

Za zadani $\tau = 8{,}205 \cdot 10^7$s dobije se aktivnost $A_0 = 1{,}309 \cdot 10^7 s^{-1}$. **(1b)**

Kako je milijarda raspada vrlo mali broj naspram broja jezgara na početku, to se aktivnost može smatrati konstantnom, i broj raspada u vremenu Δt iznosi $\Delta N = A\,\Delta t$, pa je $\Delta t = 10^9/1{,}309 \cdot 10^7s=76.4$s. **(2b)**

c) Iz $K = E - m_0c^2 = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2$ dobije se $v = c\dfrac{\sqrt{K^2 + 2Km_0c^2}}{K + m_0c^2}$. **(2b)**

Iz $m_0c^2 = 0{,}911$MeV i izračunatog K dobije se $v = 0{,}887c$. Brzina pozitrona u materijalu je 0,00887c. **(1b)**

Vrijeme putovanja pozitrona tom stalnom brzinom kroz materijal je 37ns. **(1b)**

Foton je krenuo 3ps kasnije od pozitrona i on stigne za 330ps do detektora, što su zanemariva vremena s obzirom na putovanje pozitrona. **(1b)**

Budući da se dolazak pozitrona bilježi 47ns nakon dolaska γ-fotona, to znači da je pozitron zastao u nano-šupljini 10ns. **(1b)**

Korišteni start-signal je prikladan jer polazi gotovo odmah, jako je velike brzine i usporedive je energije s fotonom nastalim anihilacijom pa se može koristiti isti detektor. **(1b)**

4. zadatak (17 bodova)

a) Atom mase m prije apsorpcije giba se brzinom v ususret fotonu valne duljine λ. Nakon apsorpcije količina gibanja atoma smanjena je na $mv' = mv - h/\lambda$, to jest brzina je smanjena za $\Delta v = -hf/mc$. **(2b)**

Očuvanje energije glasi: $hf + mv^2/2 = E + mv'^2/2$, gdje je E razlika energija prvog pobuđenog stanja i osnovnog stanja. **(2b)**

Uvrštavanjem v' iz prve u drugu jednadžbu dobije se $hf(1+v/c) = E + h^2f^2/2mc^2$. Zanemarivanjem $hf/2mc^2$, te za $v \ll c$ dobije se $hf = E(1 - v/c) = 3{,}36 \cdot 10^{-19}(1 - 50/300000000)$J, to jest frekvencija je $5{,}071 \cdot 10^{14}$Hz$-8{,}5 \cdot 10^7$Hz, pa energija fotona mora biti niža od E za $5{,}6 \cdot 10^{-26}$J. Valna duljina potrebnog fotona je 591,6nm, to jest točnije za ~0,00001nm viša od toga. **(3b)**

b) Smanjenje količine gibanja atoma jednako je količini gibanja apsorbiranog fotona, pa je promjena brzine $\Delta v = -hf/mc = -0{,}029$m/s. **(2b)**

c) Iz dobivenog izraza $hf(1+v/c) = E$ treba naći u kojem intervalu smije biti brzina atoma, ako je energija prvog pobuđenog stanja u intervalu Γ. Slijedi da je $hfv_i/c = \Gamma$, iz čega se dobije širina intervala brzine $v_i = c\Gamma/hf = 6{,}25$m/s. **(3b)**

d) Iz relacije neodređenosti slijedi da se prijelaz u osnovno stanje dogodi nakon $t = h/\Gamma = 1{,}5 \cdot 10^{-8}$s. **(2b)**

Smanjenje brzine pri apsorpciji puno je manje od intervala u kojem smije biti brzina da bi apsorpcija bila moguća, što govori da će isti atom moći mnogo puta apsorbirati foton te se tako znatno usporiti. Svaki od tih procesa rezultira usporavanjem jedne komponente brzine svakog atoma, a nakon emisije atom se odbija u nasumičnim smjerovima, zbog čega se ukupna kinetička energija cijelog plina smanjuje. **(1b)**

e) Fotoni su i dalje dominantno određeni energijom E, s time da izraz $\lambda = hc/E(1+v/c)$ zbog 100 puta manje brzine nego pri 2,3K (jer je $v^2 \sim T$) daje da valna duljina treba biti za 0,0000001nm veća od 591,6nm **(2b)**

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Brodarica, 25.-28. travnja 2016.

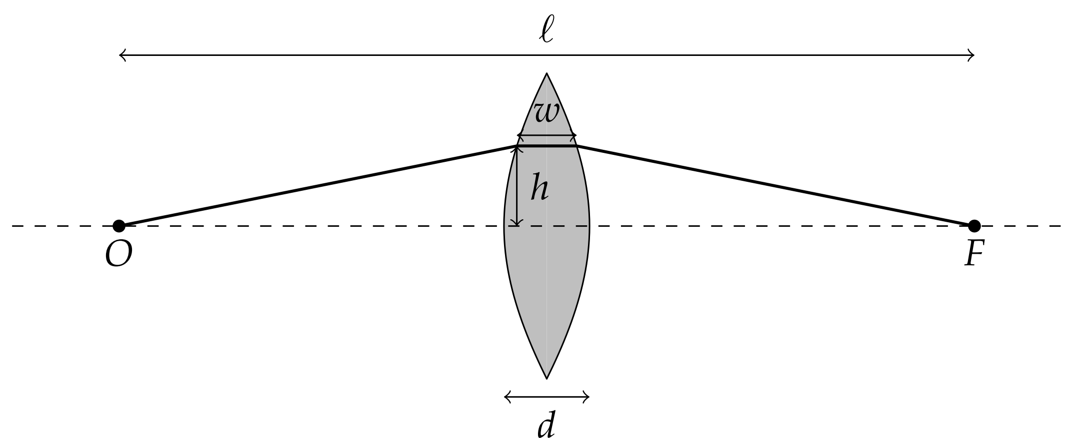
Srednje škole - 4. skupina

1. Kao rezultat testiranja nuklearnog oružja sredinom prošlog stoljeća, u atmosferi su stvorene znatne količine radioaktivnog izotopa vodika—tricija. Jezgra tricija, triton, sastoji se od jednog protona i dva neutrona te se standardno označava $^3_1$H. Triton je nestabilna jezgra s vremenom poluraspada od 12.3 godine. Atomi tricija u atmosferi se brzo vežu u molekule vode i, nošeni kišom, završe u oceanu. Tamo dolazi do radioaktivnog raspada u kojem se triton $^3_1$H raspada na stabilnu jezgru helija $^3_2$He koju u normalnim okolnostima, kao niti triton, ne nalazimo u oceanu. Stoga je, mjerenjem relativnih udjela izotopa helija $^3_2$He i tricija $^3_1$H u uzorku morske vode, moguće odrediti koliko se dugo radioaktivan tricij nalazi u oceanu.

   - Kojeg je tipa raspad $^3_1\text{H} \to ^3_2\text{He}$? Nastaju li još neke čestice u tom raspadu? Ako da, koje?
   - Mjerenja na uzorku morske vode iz 1952. godine su pokazala da je omjer izotopa helija naspram tricija 0.483 : 1. Ako sav tricij u oceanu pripišemo eksploziji jedne atomske bombe, koje je godine ta bomba eksplodirala?
   - Druga je atomska bomba na istom mjestu eksplodirala 1955. godine, a mjerenja uzorka morske vode iz 1956. godine pokazuju da je omjer izotopa helija naspram tricija tada bio 0.158 : 1. Pod pretpostavkom da je jačina atomske bombe proporcionalna količini stvorenog tricija u trenutku eksplozije, odredite koja je od atomskih bombi, prva ili druga, bila snažnija. Koliko puta?

[17 BODOVA]

2. Točkasti izvor svjetlosti se nalazi u točki O, a vi želite konstruirati leću koja bi svjetlost fokusirala u točku F, na udaljenosti $\ell = 1\,\text{m}$ od izvora. U tu ćete svrhu koristiti komad stakla debljine $d = 2\,\text{cm}$ i indeksa loma $n = 1.62$. Zbog jednostavnosti, napravit ćete simetričnu bikonveksnu leću i postaviti je točno između točaka O i F, kao na donjoj slici.



   - Prema Fermatovom principu, da bi se zrake svjetlosti, koje su istovremeno krenule iz točke O, fokusirale u točki F, one moraju tamo stići istovremeno. Koliko je vremena potrebno svjetlosti da dođe iz točke O do točke F, ako prolaze kroz gore spomenutu leću?
   - Zbog simetrične konstrukcije, svjetlost se unutar leće giba paralelno optičkoj osi. Koristeći tu činjenicu, kao i Fermatov princip, odredite kako debljina leće w mora ovisiti o visini h tako da leća ima tražena svojstva.
   - Jednom kad ste izbrusili leću da bude traženog oblika, koliko je ta leća velika? To jest, gledano iz smjera optičke osi, koliki je njen polumjer R?
   - Ukoliko izvor emitira svjetlost u svim smjerovima, koliki je udio emitirane svjetlosti fokusiran u točki F?

[19 BODOVA]

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Brodarica, 25.-28. travnja 2016.

3. Uzorak idealnog crnog tijela temperature $T = 1000\,\mathrm{K}$ stavi se u laboratorijsku centrifugu kraka $r = 1\,\mathrm{m}$ i zavrti do kutne brzine ω. U središtu centrifuge, na samoj osi rotacije, nalazi se optički spektrometar pomoću kojeg se mjeri temperatura uzorka u gibanju.

   - Hoće li izmjerena temperatura biti veća ili manja od stvarne temperature uzorka?
   - Pri kojoj će se kutnoj brzini ω izmjerena temperatura razlikovati za $\Delta T = 1\,\mathrm{K}$ od stvarne?

[14 BODOVA]

4. Je li foton stabilna čestica? Ovaj će nam zadatak dati odgovor na to pitanje. Pretpostavite da se foton energije E_γ giba u vakuumu i, u nekom trenu, spontano raspadne. Budući da je foton nositelj elektromagnetske interakcije, za očekivati je da su produkti raspada fotona neke nabijene čestice. Najlakše nabijene čestice su elektron i njegova antičestica, pozitron. Zbog zakona očuvanja naboja, među produktima raspada mora biti isti broj čestica i antičestica. Uzmimo, stoga, da se foton spontano raspada na elektron-pozitron par: $\gamma \to e^+e^-$.

   - Napišite zakone očuvanja energije i količine gibanja za gornji raspad, te iz njih odredite izraze za kutove raspršenja elektrona i pozitrona u odnosu na smjer upadnog fotona. Pokažite da se kut raspršenja $e^\pm$ može izraziti samo kao funkcija količina gibanja $e^\pm$ i njegove mase. Što nam dobiveni rezultati govore o spontanom raspadu fotona?

   Promotrimo sad drugu mogućnost raspada fotona. Foton upada upada u mirujući olovni blok i sudari se s jezgrom olova N[1] uslijed čega dolazi do raspada $\gamma N \to Ne^+e^-$. Dakle, u sudaru se foton raspadne na elektron-pozitron par, a jezgra se odbije, bez raspada. Ovaj se proces naziva *dezintegracija fotona u materijalu*.

   - Odredite kojom minimalnom energijom E_γ (u MeV-ima) foton mora udariti u mirujuću jezgru olova da dođe do raspada. Masa jezgre olova je $M = 207.2u$.

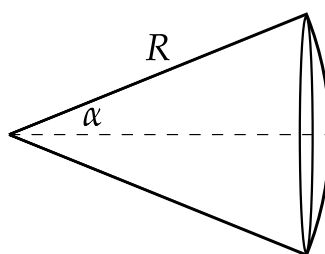
   Prilikom računa koristite relativističke izraze za energiju i količinu gibanja te zanemarite elektrostatsko privlačenje/odbijanje među nabijenim česticama.

[20 BODOVA]

Vrijednosti fizikalnih konstanti:

- brzina svjetlosti: $c = 3.00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$;
- elementarni naboj: $e = 1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$;
- masa elektrona: $m = 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$;
- unificirana atomska jedinica mase: $u = 1.66 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$.

Formula za oplošje kugline kape polumjera R i polukuta α: $2\pi R^2(1 - \cos\alpha)$.



[1] *Nucleus* = jezgra.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Brodarica, 25.-28. travnja 2016.

Srednje škole - 4. skupina, rješenja i smjernice za bodovanje

Upute za bodovanje: Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ukoliko učenici riješe zadatak drugačijim, a fizikalno ispravnim načinom, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

1.
- Prilikom raspada ${}^3_1\mathrm{H} \to {}^3_2\mathrm{He}$, jedan se neutron pretvori u proton što znači da se radi o β^- raspadu. Puni raspad glasi

$$ {}^3_1\mathrm{H} \to {}^3_2\mathrm{He} + e^- + \bar{\nu}_e, \qquad [3\ \text{BODA}]$$

i u njemu još nastaju elektron i (elektronski) (anti)neutrino.

- Označimo $t = 0$ trenutak u kojem je eksplodirala prva atomska bomba i pretpostavimo da je sav tricij odmah završio u oceanu. Zbog radioaktivnog raspada, količina tricija i helija se u vremenu mijenja na način

$$N_{\text{tricij}}(t) = N_1\, 2^{-t/T}, \qquad [1\ \text{BOD}]$$
$$N_{\text{helij}}(t) = N_1(1 - 2^{-t/T}), \qquad [1\ \text{BOD}]$$

gdje je N_1 količina početnog tricija oslobođena u eksploziji prve bombe, a $T = 12.3$ godina vrijeme poluživota tricija. Odavde je relativni omjer helija naspram tricija

$$\eta_1(t) = \frac{N_{\text{helij}}(t)}{N_{\text{tricij}}(t)} = 2^{t/T} - 1. \qquad [2\ \text{BODA}]$$

Ako izvrnemo ovu relaciju, dobijemo

$$t = \frac{\ln(1+\eta_1)}{\ln 2} T. \qquad [1\ \text{BOD}]$$

Uvrštavanjem $\eta_1 = 0.483$ dobivamo $t \approx 7$ godina, što znači da je prva atomska bomba eksplodirala 1945. godine. [1 BOD]

- Neka je $\tau = 10$ godina, vrijeme proteklo između eksplozija dviju atomskih bombi. Količina tricija i helija nakon eksplozije druge bombe, $t \geq \tau$ se mijena u vremenu na način

$$N_{\text{tricij}}(t) = N_1\, 2^{-t/T} + N_2\, 2^{-(t-\tau)/T}, \qquad [2\ \text{BODA}]$$
$$N_{\text{helij}}(t) = N_1(1 - 2^{-t/T}) + N_2(1 - 2^{-(t-\tau)/T}), \qquad [2\ \text{BODA}]$$

gdje je N_2 količina tricija nastala u eksploziji druge bombe. Relativni omjer ovih elemenata sad postaje

$$\eta_2(t) = \frac{N_{\text{helij}}(t)}{N_{\text{tricij}}(t)} = \frac{2^{t/T} - 1 + k(2^{t/T} - 2^{\tau/T})}{1 + k\, 2^{\tau/T}}, \qquad [2\ \text{BODA}]$$

gdje je $k = N_2/N_1$ omjer količina tricija oslobođenih u drugoj, odnosno, prvoj eksploziji. Odavde možemo izraziti k kao

$$k = -\frac{1 - (1+\eta_2)2^{-t/T}}{1 - (1+\eta_2)2^{-(t-\tau)/T}}. \qquad [1\ \text{BOD}]$$

Uvrštavanjem $t = 11$ godina imamo

$$k \approx 4. \qquad [1\ \text{BOD}]$$

Druga je bomba, dakle, bila četiri puta snažnija od prve.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Brodarica, 25.-28. travnja 2016.

2. • Budući da, prema Fermatovom principu, sve zrake koje krenu iz točke O dođu u fokus F za isto vrijeme, dovoljno je izračunati potrebno vrijeme samo za jednu zraku. Najjednostavnije je uzeti zraku koja se giba uzduž optičke osi. Za nju imamo

$$t = \frac{l-d}{c} + \frac{d}{c/n} = \frac{l+(n-1)d}{c} \quad [2 \text{ BODA}]$$
$$= 3.37 \times 10^{-9}\,\text{s}. \quad [1 \text{ BOD}]$$

• Zraci koja upada na leću na visini h, potrebno je

$$t = \frac{2\sqrt{h^2 + ((l-w)/2)^2}}{c} + \frac{nw}{c} \quad [2 \text{ BODA}]$$

vremena da dođe do točke F. Međutim, prema Fermatovom principu, to vrijeme mora biti isto onom prethodno izračunatom. Dakle,

$$\frac{2\sqrt{h^2 + ((l-w)/2)^2}}{c} + \frac{nw}{c} = \frac{l+(n-1)d}{c}. \quad [2 \text{ BODA}]$$

Sređivanjem, dobijemo kvadratnu jednadžbu za w,

$$(n^2-1)w^2 - 2(n-1)(\ell+nd)w + d(n-1)(2\ell+(n-1)d) - 4h^2 = 0. \quad [1 \text{ BOD}]$$

Rješenja ove jednadžbe su

$$w_{1,2} = \frac{\ell+nd}{n+1} \pm \frac{\sqrt{(n-1)\left[(n-1)(\ell-d)^2 + 4(n+1)h^2\right]}}{n^2-1}. \quad [1 \text{ BOD}]$$

Predznak rješenja biramo uvjetom $w(h=0) = d$. Uz ovo, oblik leće $w(h)$ je

$$w(h) = \frac{\ell+nd}{n+1} - \frac{\sqrt{(n-1)\left[(n-1)(\ell-d)^2 + 4(n+1)h^2\right]}}{n^2-1}. \quad [1 \text{ BOD}]$$

• Veličinu leće određujemo iz uvjeta $w(h=R) = 0$, odnosno—debljina leće na njenom rubu mora, po definiciji, biti jednaka nuli. [2 BODA]
Uvrštavanje $w = 0$ vodi na izraz za polumjer leće

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{(n-1)[2\ell+(n-1)d]d} \quad [1 \text{ BOD}]$$
$$= 7.90\,\text{cm}. \quad [1 \text{ BOD}]$$

• U fokusu F će završiti sve zrake koje upadaju na leću. A to su upravo one zrake koje su iz točke O emitirane pod kutom

$$\varphi \in [-\alpha, +\alpha] \quad [2 \text{ BODA}]$$

u odnosu na optičku os, gdje je $\cos\alpha = (\ell/2)/(R^2 + (\ell/2)^2)^{1/2}$. Prema tome, ako zamislimo da se iz točke O širi sferna fronta svjetlosnog vala polumjera $(R^2 + (\ell/2)^2)^{1/2}$, zrake koje će biti fokusirane se nalaze na sfernoj kapici polumjera R. Zaključujemo, udio fokusiranih zraka jest omjer oplošja te sferne kapice i oplošja cijele sfere

$$\eta = \frac{2\pi(R^2 + (\ell/2)^2)(1-\cos\alpha)}{4\pi(R^2 + (\ell/2)^2)} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{(n-1)d}{\ell+(n-1)d} \quad [2 \text{ BODA}]$$
$$= 1.22\,\%. \quad [1 \text{ BOD}]$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Brodarica, 25.-28. travnja 2016.

3. Optički spektrometar, kao što mu ime kaže, mjeri optički spektar uzorka. Pod pretpostavkom da mjereni spektar odgovara spektru crnog tijela, temperaturu uzorka možemo odrediti iz Wienovog zakona

$$\lambda_{\max} T = b,$$ [2 BODA]

gdje je $\lambda_{\max}$ valna duljina zračenja najvećeg intenziteta, a b Wienova konstanta. Dakle, ako će spektrometar mjeriti temperaturu T' različitu od prave temperature uzorka T, to mora biti zato jer mjeri drugačiju maksimalnu valnu duljinu $\lambda'_{\max}$. [2 BODA]

Valna je duljina zračenja povezana s frekvencijom preko

$$\lambda = \frac{c}{\nu},$$ [1 BOD]

odnosno s periodom τ preko

$$\lambda = c\tau.$$ [1 BOD]

Dakle, do promjene u mjerenju valne duljine može doći jedino ako za uzorak i mjerni instrument drugačije teče vrijeme. No, ovo je poznat efekt koji se manifestira pri relativističkim brzinama—radi se, naime, o dilataciji vremena. [1 BOD]

- Ako se uzorak u laboratorijskom sustavu giba brzinom v konstantnog iznosa, no ne nužno i smjera, tada je veza između proteklog vremena τ u sustavu uzorka i laboratorijskom sustavu τ' dana relacijom

  $$\tau' = \gamma\tau,$$ [1 BOD]

  gdje je $\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ Lorentzov faktor. Budući je $\gamma > 1$, to je $\tau' > \tau$. Ako uzmemo da je τ upravo period zračenja, imamo vezu između emitirane $\lambda = c\tau$ i detektirane valne duljine $\lambda' = c\tau'$

  $$\lambda' = \gamma\lambda.$$ [1 BOD]

  Ova relacija vrijedi za sve valne duljine, pa i one maksimalnog intenziteta. Prema tome, veza između prave temperature uzorka $T = b/\lambda_{\max}$ i one mjerene u laboratorijskom sustavu $T' = b/\lambda'_{\max}$ je

  $$T' = \frac{1}{\gamma}T.$$ [1 BOD]

  Dakle, spektrometar će mjeriti manju temperaturu od prave temperature uzorka.

- Iz prethodne relacije možemo odrediti brzinu gibanja uzorka, ako znamo T i T'

  $$v = c\sqrt{1-\left(\frac{T'}{T}\right)^2}.$$ [2 BODA]

  Uzmajući u obzir za se radi o kružnom gibanju, imamo

  $$\omega = \frac{v}{r} = \frac{c}{r}\sqrt{1-\left(\frac{T'}{T}\right)^2}.$$ [1 BOD]

  Uvrštavajući $T = 1000\,\mathrm{K}$ i $T' = 999\,\mathrm{K}$, dobivamo potrebnu kutnu brzinu

  $$\omega = 1.34 \times 10^7\ \mathrm{rad/s}.$$ [1 BOD]

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Brodarica, 25.-28. travnja 2016.

4. • Polazimo od zakona očuvanja

$$E_\gamma = E_+ + E_-, \qquad [1 \text{ BOD}]$$

$$\vec{p}_\gamma = \vec{p}_+ + \vec{p}_-. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

Ovdje smo indeksom γ označili energiju i količinu gibanja upadnog fotona, a indeksima $\pm$ energiju i količinu gibanja nastalog elektrona $(-)$ i pozitrona $(+)$. Ove ćemo jednadžbe kvadrirati, donju pomnožiti s c^2 i oduzeti od gornje. Na taj način dolazimo do

$$E_\gamma^2 - (\vec{p}_\gamma c)^2 = (E_+^2 - (\vec{p}_+ c)^2) + (E_-^2 - (\vec{p}_- c)^2) + 2(E_+ E_- - c^2 \vec{p}_+ \cdot \vec{p}_-).$$

Izraze u zagradama možemo pojednostaviti koristeći

$$E_\gamma^2 = (\vec{p}_\gamma c)^2, \qquad [1 \text{ BOD}]$$

$$E_\pm^2 = (\vec{p}_\pm c)^2 + (mc^2)^2, \qquad [1 \text{ BOD}]$$

gdje je m masa elektrona (pozitrona). Ovim manipulacijama dolazimo do izraza

$$0 = (mc^2)^2 + E_+ E_- - c^2 \vec{p}_+ \cdot \vec{p}_-. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

Ako sad u gornju relaciju stavimo npr. $E_- = E_\gamma - E_+$ i $\vec{p}_- = \vec{p}_\gamma - \vec{p}_+$, te opet iskoristimo vezu između relativističke energije i količine gibanja dolazimo do

$$E_+ E_\gamma = c^2 \vec{p}_+ \cdot \vec{p}_\gamma. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

Ako je θ_+ kut raspršenja pozitrona, tada gornja relacija postaje

$$E_+ E_\gamma = c^2 p_+ p_\gamma \cos\theta_+. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

Koristeći $E_\gamma = p_\gamma c$ i $E_+ = \sqrt{(p_+ c)^2 + (mc^2)^2}$, imamo traženi izraz za θ_+.

$$\cos\theta_+ = \frac{E_\gamma}{p_\gamma c}\frac{E_+}{p_+ c} = \sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p_+}\right)^2}. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

Potpuno analogno bismo dobili izraz za kut raspršenja elektrona

$$\cos\theta_- = \sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p_-}\right)^2}. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

Iz dobivenih rezultata vidimo da su kosinusi kutova raspršenja nastalih čestica veći od jedinice, odakle zaključujemo da do takvog raspršenja ne može doći. Drugim riječima, foton se ne može spontano raspasti na elektron-pozitron par. [2 BODA]

• Da bismo odredili minimalnu potrebnu energiju za raspršenje $\gamma N \to Ne^+e^-$, najlakše je zamisliti taj sudar u sustavu centra mase. Tada foton i jezgra jure jedan prema drugom, sudaraju se i foton se pretvori elektron-pozitron par. Ako je početna energija minimalna moguća, tada će, nakon sudara, svi produkti naprosto mirovati. Drugim riječima, među njima neće biti relativnog gibanja. To pak znači da će se u bilo kojem drugom referentnom sustavu, pa i u laboratorijskom, tj. onom u kojem olovni blok miruje, produkti sudara Ne^+e^- gibati kao jedna čestica mase $M^* = M + 2m$. [3 BODA]
S ovim razmatranjem možemo napisati zakone očuvanja

$$E_\gamma + Mc^2 = E^*, \qquad [1 \text{ BOD}]$$

$$\vec{p}_\gamma = \vec{p}^*, \qquad [1 \text{ BOD}]$$

gdje su E^* i $\vec{p}^*$ energija i količina gibanja čestice mase M^*. Ponavljanjem računa kao u prethodnom zadatku, te koristeći $E^{*2} = (\vec{p}^* c)^2 + (M^* c^2)^2$ dolazimo do relacije

$$(Mc^2)^2 + 2E_\gamma Mc^2 = (M^* c^2)^2, \qquad [2 \text{ BODA}]$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Brodarica, 25.-28. travnja 2016.

odakle je

$$E_\gamma = 2mc^2\left(1 + \frac{m}{M}\right). \qquad [1 \text{ BOD}]$$

minimalna energija koju mora imati upadni foton da bi se raspao na zadani način. Numerički,

$$E_\gamma = 1.02\,\mathrm{MeV}. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Vinkovci, 02.– 05. svibnja 2017.

Srednje škole - 4. skupina

1. Najjače električno polje koje se može uspostaviti u zraku iznosi $E = 3 \times 10^6\,\mathrm{V/m}$. Pretpostavite da je cijeli prostor ispunjen takvim homogenim električnim poljem, te da u nj postavimo mirujući elektron.

   - Nađite formulu koja opisuje vremensku ovisnost brzine elektrona $v(t)$ te odredite $\lim_{t\to\infty} v(t)$. Uzmite da vrijeme $t = 0$ označava početak gibanja elektrona.
   - Za koje će vrijeme τ elektron doseći brzinu $v = 0.99c$?
   - Koji će put s prevaliti za to vrijeme?

   Uputa: za pravocrtna gibanja, električna sila na nabijenu česticu ne ovisi o brzini čestice.

   [16 BODOVA]

2. Pretpostavimo da se višeelektronski atomi mogu dobro opisati Bohrovim modelom atoma. To znači da u atomu atomskog broja Z, koji se nalazi u stabilnom stanju, elektroni popunjavaju Bohrove energijske orbite energija

$$E_n = -\frac{Z \times 13.6\,\mathrm{eV}}{n^2},$$

   gdje je $n = 1, 2, \ldots, Z$, i to tako da se u svakoj popunjenoj orbiti nalazi točno jedan elektron. Razmotrimo sad sljedeći eksperiment. Na atom bora ($Z = 5$), koji se nalazi u stabilnom stanju, ispuca se kratkotrajni laserski puls frekvencije $\nu = 1.93 \times 10^{16}\,\mathrm{Hz}$. Kao rezultat interakcije sa svjetlosti, elektron kinetičke energije $E = 11.9\,\mathrm{eV}$ je trenutno izbačen iz atoma. Nakon nekog (kratkog) vremena, atom spontano izbaci i drugi elektron, kinetičke energije $E' = 56.2\,\mathrm{eV}$. Ubrzo, atom spontano emitira i foton frekvencije ν' te se nakon toga nađe u stabilnom, dvostruko ioniziranom stanju.

   - Odredite orbitu iz koje je izbačen prvi elektron.
   - Objasnite kako je došlo do izbacivanja drugog elektrona, te nađite orbitu iz koje je izbačen.
   - Izračunajte nepoznatu frekvenciju emitiranog fotona ν'.

   [22 BODA]

3. Obična električna žarulja sadrži gusto namotanu zavojnicu od volframove niti, koju možemo aproksimirati plaštom cilindra duljine $L = 2\,\mathrm{cm}$ i polumjera baze $R = 0.5\,\mathrm{mm}$. Za vrijeme rada žarulje volfram doseže temperature i do $T = 3300\,\mathrm{K}$ te zrači spektrom savršenog crnog tijela.

   - Odredite snagu žarulje P te valnu duljinu $\lambda_{\max}$ na kojoj se javlja maksimum zračenja.
   - Pretpostavimo da u mraku gori samo jedna takva žarulja. S koje će maksimalne udaljenosti D ona biti vidljiva ljudskom oku?

   Da bi ljudsko oko registriralo svjetlosni signal konstantnog intenziteta, nužno je da svake sekunde na nj upadne barem 10^7 fotona[1] srednje valne duljine $\bar{\lambda} = 565\,\mathrm{nm}$. Uzmite da je polumjer zjenice u mraku $r = 3\,\mathrm{mm}$.

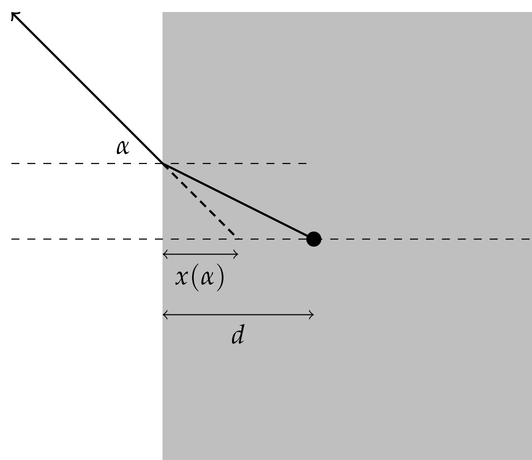
   [14 BODOVA]

[1] U slučaju pojedinih bljeskova svjetlosti, taj je broj znantno manji!

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Vinkovci, 02.–05. svibnja 2017.

4. Mala kuglica nalazi se usred prozirnog bloka načinjenog od optičkog materijala indeksa loma $n > 1$ na udaljenosti d od ruba bloka. Kad kuglicu promatramo izvan bloka, u području ispunjenom zrakom ($n_{\text{zrak}} = 1$), čini nam se da udaljenost kuglice od ruba bloka x ovisi o kutu α pod kojim promatramo kuglicu, kao što je prikazano na slici.



Provedena mjerenja za nekoliko različitih kutova daju sljedeću ovisnost $x(\alpha)$:

$\alpha/°$	x/cm
0	5.00
30	4.47
45	3.78
60	2.77
90	0.00

Koristeći ove podatke odredite indeks loma bloka n, kao i stvarnu udaljenost kuglice od ruba bloka d.

[18 BODOVA]

Vrijednosti fizikalnih konstanti:

- brzina svjetlosti: $c = 3.00 \times 10^8$ m/s;
- elementarni naboj: $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C;
- masa elektrona: $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg;
- Planckova konstanta: $h = 6.63 \times 10^{-34}\,\text{m}^2\text{kg/s} = 4.14 \times 10^{-15}\,\text{eV s}$;
- Stefan-Boltzmannova konstanta: $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\,\text{Ws}^{-2}\text{K}^{-4}$;
- Wienova konstanta: $b = 2.89 \times 10^{-3}$ m K;

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Vinkovci, 02.–05. svibnja 2017.

Srednje škole - 4. skupina, rješenja i smjernice za bodovanje

Upute za bodovanje: Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ukoliko učenici riješe zadatak drugačijim, a fizikalno ispravnim načinom, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

1. • Gibanje naboja u električnom polju konstantnog iznosa je opisano drugim Newtonovim zakonom

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = qE, \qquad [3 \text{ BODA}]$$

gdje je $p = \gamma m v$ relativistička količina gibanja. Uz $p(t = 0) = 0$, gornja jednadžba postaje

$$p(t) = qEt. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

Izražavanjem brzine preko količine gibanja

$$v(t) = \frac{p/m}{\sqrt{1 + (p/mc)^2}}, \qquad [2 \text{ BODA}]$$

nalazimo vremensku ovisnost brzine

$$v(t) = \frac{qEt/m}{\sqrt{1 + (qEt/mc)^2}}. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

U limesu $t \to \infty$ dobivamo očekivani rezultat

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = c, \qquad [2 \text{ BODA}]$$

budući da čestica konstantno ubrzava, a ne može se gibati brže od brzine svjetlosti.

• Vrijeme potrebno da čestica dosegne 99% brzine svjetlosti računamo iz

$$\tau = \frac{m\gamma v}{qE} \qquad [2 \text{ BODA}]$$

$$= 4.00 \times 10^{-9}\,\text{s}, \qquad [1 \text{ BOD}]$$

gdje smo uvrstili $v = 0.99c$.

• Put koji čestica prevali računamo iz rad-energija teorema. Ukupni rad koji je konstantna sila qE obavila na pravocrtnoj putanji elektrona mora biti jednak promjeni kinetičke energije elektrona. Budući da je elektron na početku mirovao, vrijedi

$$s = \frac{(\gamma - 1)mc^2}{qE} \qquad [3 \text{ BODA}]$$

$$= 1.04\,\text{m}. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Vinkovci, 02.–05. svibnja 2017.

2. • Budući da je elektron izbačen zbog izravnog međudjelovanja sa svjetlošću, koristeći zakon očuvanja energije možemo odrediti orbitu u kojoj se izbačeni elektron nalazio

$$h\nu = E + \frac{Z\epsilon}{n^2}, \qquad [1 \text{ BOD}]$$

gdje smo uveli pokratu $\epsilon = 13.6\,\text{eV}$. Odavde odmah imamo

$$n = \sqrt{\frac{Z\epsilon}{h\nu - E}} \qquad [1 \text{ BOD}]$$

$$= 1. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

Prvi je elektron, dakle, izbačen iz najniže Bohrove orbite.

• Nakon što je elektron izbačen iz $n = 1$ orbite, atom bora se ionizirao i sadrži četiri elektrona u orbitama $n = 2, 3, 4, 5$. Svaki od tih elektrona ima na raspolaganju slobodnu $n = 1$ orbitu u koju može spontano skočiti. U trenutku skoka, emitira se jedan foton koji može napustiti atom, ali može i izbaciti neki drugi elektron, ako ima dovoljno energije za to. Taj se proces naziva Augerov efekt. Ukoliko je opažena spontana emisija elektrona, bez drugih emitiranih čestica, radi se o Augerovom elektronu. [3 BODA]

Da bismo kvantitativno odredili je li moglo doći do Augerovog efekta u našem slučaju, pretpostavimo da je elektron iz m-te orbite prešao u $n = 1$ orbitu, zatim emitirao foton koji je izbacio elektron iz k-te orbite i predao mu kinetičku energiju E'. Zakon očuvanja energije u ovom slučaju daje

$$Z\epsilon\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) = \frac{Z\epsilon}{k^2} + E'. \qquad [2 \text{ BODA}]$$

Odavde slijedi da nepoznate orbite m i k moraju zadovoljavati uvjet

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{E'}{Z\epsilon}. \qquad [2 \text{ BODA}]$$

U posljednjoj se jednakosti brojevi m i k javljaju simetrično, što znači da ako je moguće da elektron iz m-te orbite prelaskom u $n = 1$ orbitu izbaci elektron iz k-te orbite, moguće je i da elektron iz k-te orbite na isti način izbaci elektron iz m-te orbite. Dakle, ako rješenje gornje jednadžbe postoji, ono nije jedinstveno, već postoje dva rješenja. [3 BODA]

Sad preostaje isprobati sljedeće kombinacije brojeva

$$(m,k) \in \{(2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$$

i provjeriti zadovoljava li koja gornju relaciju. Jedino je rješenje gornje jednadžbe

$$(m,k) = (3,4), \qquad [3 \text{ BODA}]$$

što znači da je drugi emitirani elektron mogao doći iz treće ili četvrte Bohrove orbite.

• Nakon što je emitiran i drugi elektron, atom bora je sad dvostruko ioniziran i ima elektrone u orbitama $n = 1, 2, 5$. Jedini mogući elektronski prijelazi su $5 \to 4$ i $5 \to 3$. Prijelaz $5 \to 4$ ne bi doveo ion bora u stabilno stanje, što znači da je posljednji foton rezultat prijelaza $5 \to 3$. [3 BODA]

Frekvencija ovog prijelaza je stoga

$$\nu' = \frac{E_5 - E_3}{h} = \frac{16}{225}\frac{Z\epsilon}{h} \qquad [2 \text{ BODA}]$$

$$= 1.17 \times 10^{15}\,\text{Hz}. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Vinkovci, 02.–05. svibnja 2017.

3. • Prema Stefan-Boltzmannovom zakonu, snagu zračenja crnog tijela računamo kao

$$P = S\sigma T^4, \qquad [2 \text{ BODA}]$$

gdje je S površina crnog tijela, a T njegova temperatura. U slučaju volframove žarulje, imamo

$$P = 2R\pi L\sigma T^4 \qquad [1 \text{ BOD}]$$
$$= 423\,\text{W}. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

Valnu duljinu maksimuma zračenja možemo odredite iz Wienovog zakona

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{b}{T} \qquad [1 \text{ BOD}]$$
$$= 876\,\text{nm}, \qquad [1 \text{ BOD}]$$

što je izvan vidljivog spektra.

• Kad smo odmaknuti od žarulje, možemo uzeti da se svjetlost širi izotropno, bez obzira na činjenicu što je izvor svjetlosti cilindar, a ne sfera. Na udaljenosti D od izvora, ukupna snaga zračenja koja upada na disk polumjera r (oko) jest

$$P_{\text{oko}} = P\frac{\pi r^2}{4\pi D^2} = P\left(\frac{r}{2D}\right)^2, \qquad [2 \text{ BODA}]$$

gdje je P ukupna snaga izvora, izračunata gore. Prosječan foton koji upada u oko ima energiju

$$\bar{E} = \frac{hc}{\bar{\lambda}}, \qquad [2 \text{ BODA}]$$

što znači da u $\Delta t = 1\,\text{s}$ na oko upadne

$$N = \frac{P_{\text{oko}}\Delta t}{\bar{E}} = P\left(\frac{r}{2D}\right)^2 \frac{\bar{\lambda}\Delta t}{hc} \qquad [2 \text{ BODA}]$$

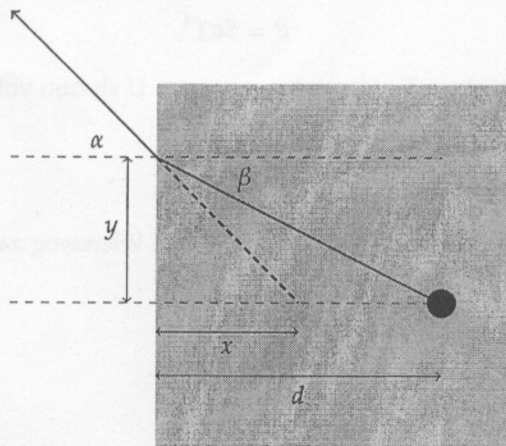
fotona. Ako iz ove relacije izrazimo D i uvrstimo minimalan potreban broj fotona, dobijemo

$$D = \sqrt{\frac{Pr^2}{4N}\frac{\bar{\lambda}\Delta t}{hc}} \qquad [1 \text{ BOD}]$$
$$= 16.44\,\text{km}. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Vinkovci, 02.–05. svibnja 2017.

4. Promotrimo zraku svjetlosti kao na slici.



Ako su kutovi α i β izlazni i upadni kut svjetlosti kao sa slike, tada je veza među njima određena Snellovim zakonom

$$\sin\alpha = n\sin\beta. \qquad [3 \text{ BODA}]$$

S druge strane, iz pravokutnih trokuta na slici imamo

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad [2 \text{ BODA}]$$

kao i

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{y}{d}. \qquad [2 \text{ BODA}]$$

Eliminacijom visine y, dolazimo do relacije

$$x = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}d. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

Ako posljednju jednadžbu kombiniramo sa Snellovim zakonom dobivamo ovisnost $x(\alpha)$

$$x = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}d. \qquad [2 \text{ BODA}]$$

Budući da je funkcija $x(\alpha)$ zadana s dva neodređena parametra, n i d, moramo iskoristiti dva različita mjerenja dana u zadatku. Svejedno je koja ćemo dva podatka uzeti (osim $\alpha = 90°$, iz kojeg ne možemo ništa zaključiti), pa uzmimo $\alpha = 0°$ i $\alpha = 45°$. To nas vodi na sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice

$$x(0) = \frac{d}{n}, \quad x(45) = \frac{d}{\sqrt{2n^2 - 1}}. \qquad [2 \text{ BODA}]$$

Odavde imamo

$$d = \left(\frac{2}{x(0)^2} - \frac{1}{x(45)^2}\right)^{-1/2} \qquad [2 \text{ BODA}]$$
$$= 10\,\text{cm}, \qquad [1 \text{ BOD}]$$

te

$$n = \frac{x(45)}{\sqrt{2x(45)^2 - x(0)^2}} \qquad [2 \text{ BODA}]$$
$$= 2. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Pula, 17.–20. travnja 2018.

Srednje škole - 4. skupina

1. Tijelo miruje u ishodištu inercijalnog sustava $\mathcal{S}$ do trenutka $t = 0$ kad se počne gibati jednoliko ubrzano u pozitivnom smjeru osi x. τ sekundi kasnije tijelo dosegne brzinu $\frac{4}{5}c$, nakon čega se nastavi jednoliko gibati tom brzinom. Nazovimo početak ubrzanog gibanja događaj A, a završetak ubrzanog gibanja događaj B.

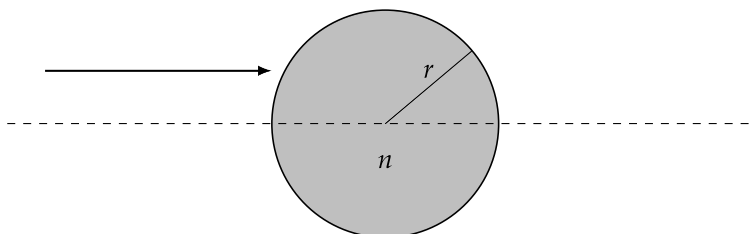
   - Odredite prostorno-vremenske koordinate (x', t') događaja A i B u inercijalnom sustavu $\mathcal{S}'$ koji se giba brzinom $\frac{4}{5}c$ u pozitivnom smjeru osi x u odnosu na $\mathcal{S}$.
   - Nađite kako položaj tijela ovisi o vremenu $x'(t')$ za promatrača iz $\mathcal{S}'$. Ograničite se na vremenski period između događaja A i B. Je li gibanje jednoliko ubrzano i u sustavu $\mathcal{S}'$?

   Odgovore zapišite preko zadanih veličina c, τ, te numeričkih faktora.

   [18 BODOVA]

2. Staklena kuglica polumjera $r = 5\,\text{cm}$ i indeksa loma $n = 1.45$ smještena je na optičkoj osi, kao na slici. Pokažite da se sve paraksijalne zrake koje upadaju na kuglicu sijeku u istoj točki nakon izlaska s druge strane kuglice. Drugim riječima, za takve zrake kuglica predstavlja konvergentnu leću. Odredite efektivnu žarišnu duljinu f kuglice za paraksijalne zrake.

   Napomena: paraksijalne zrake su zrake svjetlosti koje upadaju paralelno optičkoj osi, te dovoljno blizu nje da se mogu iskoristi aproksimacije malih kutova.



   [13 BODOVA]

3. U središtu metalne izolirane sfere nalazi se izvor monokromatskog zračenja snage $P = 100\,\text{W}$. Sfera na načinjena od srebra, čiji je izlazni rad $W = 4.5\,\text{eV}$.

   - Kolika mora biti minimalna frekvencija zračenja ν_0 da bi se sfera mogla ionizirati fotoelektričnim efektom?

   U nastavku zadatka uzmite da je frekvencija zračenja $\nu = 2\nu_0$ te da svaki emitirani foton izbaci jedan elektron.

   - Koliko dugo mora biti uključen izvor zračenja da se sfera nabije nabojem $Q = 1\,\text{C}$?
   - Kolika je ukupna kinetička energija svih izbačenih elektrona u tom slučaju?
   - Kojom se brzinom gibaju elektroni pri izlasku iz metala?

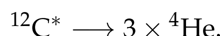
   Prilikom računa zanemarite elektrostatsko privlačenje pozitivno nabijene sfere i izbijenih elektrona.

   [15 BODOVA]

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Pula, 17.–20. travnja 2018.

4. Hoyleova rezonanca pobuđeno je stanje jezgre ugljika ^{12}C s energijom pobuđenja $E^* = 7.7\,\mathrm{MeV}$. U laboratorijskom sustavu, Hoyleova rezonanca se, iz mirovanja, raspada na tri identične alfa-čestice, tj. jezgre helija ^{4}He,



$$^{12}\mathrm{C}^* \longrightarrow 3 \times {}^{4}\mathrm{He}.$$

U tročestičnim raspadima poput ovog, kinematika produkata nije jednoznačno zadana (za razliku od dvočestičnih raspada!) već postoji beskonačno različitih kombinacija energija i međusobnih kutova koju tri alfa-čestice mogu poprimiti. Međutim, postoji sustavan način za analizu tročestičnih raspada, putem tzv. Dalitzovog dijagrama.

- Za početak izračunajte Q vrijednost ove reakcije. Ukoliko je dobivena vrijednost puno manja ($<$ 1%) od energije mirovanja jezgre helija, dalje možete koristite formule nerelativističke kinematike, dok je u suprotnom potrebno koristiti formule relativističke kinematike.
- Uvedite kinematičke varijable $t_i = T_i/Q$, gdje je T_i kinetička energija i-te alfa-čestice, te θ_{ij} kao kut između i-te i j-te alfa-čestice. Koristeći zakone očuvanja, prikažite sve t_i varijable pomoću Dalitzovih varijabli x i y definiranih preko

$$x = \sqrt{3}(t_1 - t_2), \quad y = 2t_3 - t_1 - t_2.$$

  Osim toga, pokažite i da se svi kutovi θ_{ij} mogu izraziti preko kinetičkih energija t_i, pa, posredno, i preko x i y. Dakle, kinematika produkata tročestičnog raspada je u potpunosti određena parametrima x i y.
- Da biste odredili dozvoljene vrijednosti Dalitzovih parametara u xy ravnini, prisjetite se da kinetička energija svake alfa-čestice ne smije biti negativna, $t_i \geq 0$. Odredite kako ove nejednakosti ograničavaju dozvoljene vrijednosti Dalitzovih parametara u xy ravnini.
- Osim pozitivnosti kinetičkih energija, i međusobni kutovi među česticama moraju zadovoljavati određeni uvjet, $\cos\theta_{ij} \in [-1, +1]$. Kako ovaj zahtjev dodatno ograničava dozvoljene vrijednosti u xy ravnini? Dovoljno je samo promotriti kut θ_{12}.
- Označite područje na dozvoljenom dijelu dijagrama gdje vrijedi $t_1 = t_2$. Koje sve vrijednosti može poprimiti t_3 u tom slučaju?
- Označite područje na dozvoljenom dijelu dijagrama gdje vrijedi $\theta_{12} = \pi/2$. Koje sve vrijednosti može poprimiti t_3 u tom slučaju?

Energije mirovanja jezgri ugljika i helija su $m(^{12}\mathrm{C})c^2 = 11.178\,\mathrm{GeV}$ i $m(^{4}\mathrm{He})c^2 = 3.727\,\mathrm{GeV}$.

[24 BODOVA]

Vrijednosti fizikalnih konstanti:

- brzina svjetlosti: $c = 3.00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$;
- elementarni naboj: $e = 1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$;
- masa elektrona: $m = 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$;
- Planckova konstanta: $h = 6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{m^2kg/s} = 4.14 \times 10^{-15}\,\mathrm{eV\,s}$;

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Pula, 17.–20. travnja 2018.

Srednje škole - 4. skupina, rješenja i smjernice za bodovanje

Upute za bodovanje: Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ukoliko učenici riješe zadatak drugačijim, a fizikalno ispravnim načinom, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

1. Veza između koordinata događaja u inercijalnim sustavima $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}'$ je dana standardnim Lorentzovim transformacijama

$$x' = \gamma(x - vt), \qquad t' = \gamma(t - vx/c^2),$$

gdje je v brzina $\mathcal{S}'$ u odnosu na $\mathcal{S}$, a $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Koordinate događaja A i B u sustavu $\mathcal{S}$ su

$$(x_A, t_A) = (0, 0), \qquad (x_B, t_B) = (2c\tau/5, \tau),$$ [3 BODA]

jer se čestica gibala konstantom akceleracijom $a = \dfrac{4c}{5\tau}$ iz mirovanja pa je u vremenu τ prevalila put

$$s = \frac{1}{2}\frac{4c}{5\tau}\tau^2 = \frac{2}{5}c\tau.$$

- Koristeći gore navedene Lorentzove transformacije, uz $v = 4c/5$, imamo za koordinate događaja A i B u $\mathcal{S}'$

$$(x'_A, t'_A) = (0, 0), \qquad (x'_B, t'_B) = (-2c\tau/3, 17\tau/15).$$ [3 BODA]

- Da bismo odredili vremensku ovisnost $x'(t')$, naprosto shvatimo putanju $x(t)$ u $\mathcal{S}$ kao niz događaja s koordinatama

$$(x(t), t) = \left(\frac{1}{2}\frac{4c}{5\tau}t^2, t\right),$$ [2 BODA]

te iskoristimo gornje Lorentzove transformacije. Kao rezultat imamo

$$x'(t) = \frac{4}{3}\left(\frac{t}{2\tau} - 1\right)ct, \qquad t'(t) = \frac{5}{3}\left(1 - \frac{8}{25}\frac{t}{\tau}\right)t.$$ [4 BODA]

Posljednju relaciju možemo invertirati rješavanjem kvadratne jednadžbe,

$$t(t') = \frac{25}{16}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{96}{125}\frac{t'}{\tau}}\right)\tau,$$ [2 BODA]

gdje smo predznak ispred korijena odabrali tako da vrijedi $t(t' = 0) = 0$. Uvrštavanjem ove formule u formulu za $x'(t)$ i sređivanjem, imamo

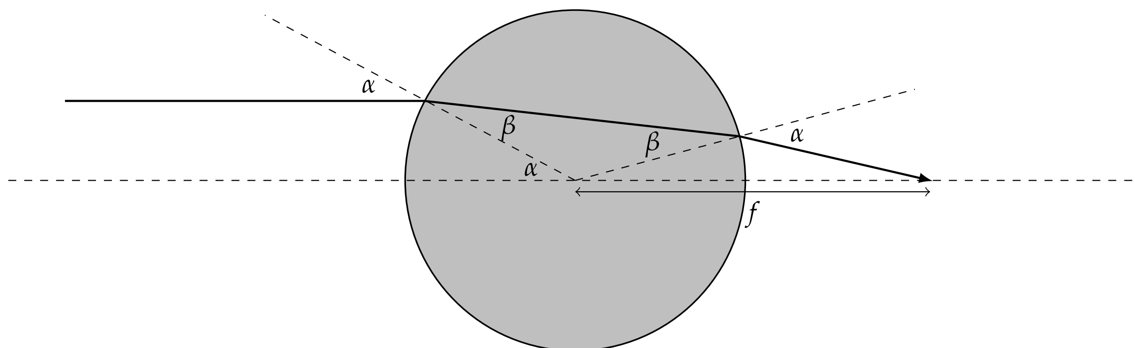
$$x'(t') = -\frac{5}{4}\left[\frac{t'}{\tau} - \frac{15}{16}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{96}{125}\frac{t'}{\tau}}\right)\right]c\tau.$$ [2 BODA]

Iz posljednjeg je izraza očito da se u sustavu $\mathcal{S}'$ ne radi o jednoliko ubrzanom gibanju. [2 BODA]

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Pula, 17.–20. travnja 2018.

2. Promotrimo kako se lomi jedna paraksijalna zraka:



[2 BODA]

Veza između kutova α i β je dana Snellovim zakonom

$$\sin\alpha = n\sin\beta. \qquad [2\ \text{BODA}]$$

S druge strane, žarišnu duljinu f možemo povezati s polumjerom kuglice r pomoću sinusnog poučka,

$$\frac{f}{r} = \frac{\sin(\pi-\alpha)}{\sin(2\alpha-2\beta)} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2(\alpha-\beta)}. \qquad [3\ \text{BODA}]$$

U paraksijalnoj aproksimaciji možemo pisati

$$\sin\alpha \approx \alpha, \quad \sin\beta \approx \beta, \quad \sin 2(\alpha-\beta) \approx 2(\alpha-\beta). \qquad [3\ \text{BODA}]$$

Iz svega slijedi

$$f = \frac{r}{2(1-1/n)} \qquad [2\ \text{BODA}]$$
$$= 8.06\,\text{cm}. \qquad [1\ \text{BOD}]$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Pula, 17.–20. travnja 2018.

3. • Emitirano zračenje frekvencije ν se sastoji od fotona energije $h\nu$, gdje je h Planckova konstanta. Prema tome, foton koji će izbaciti elektron iz metala mora imati barem toliko energije da savlada izlazni rad.

$$\nu_0 = W/h \quad [2 \text{ BODA}]$$
$$= 1.09 \times 10^{15}\,\text{Hz}. \quad [1 \text{ BOD}]$$

• Izvor snage P kroz vrijeme Δt emitira ΔN fotona frekvencije $h\nu$, tako da vrijedi

$$P = \frac{\Delta N}{\Delta t} h\nu. \quad [2 \text{ BODA}]$$

Ako svaki foton izbije jedan elektron, onda ΔN mora biti jednak broju elektrona koji (po iznosu) čine ukupni naboj Q,

$$\Delta N = \frac{Q}{e}, \quad [1 \text{ BOD}]$$

gdje je e naboj elektrona. Odavde je

$$\Delta t = \frac{\Delta N}{P} h\nu = 2\frac{QW}{eP} \quad [2 \text{ BODA}]$$
$$= 0.09\,\text{s}. \quad [1 \text{ BOD}]$$

Ovdje smo iskoristili uvjet zadatka $\nu = 2\nu_0 = 2W/h$.

• Ukupna kinetička energija izbačenih elektrona je razlika ukupne energije fotona i izlaznog rada potrebnog da se svi elektroni izbace iz metala

$$E_\text{k} = \Delta N(h\nu - W) = \frac{QW}{e} \quad [2 \text{ BODA}]$$
$$= 4.5\,\text{J}. \quad [1 \text{ BOD}]$$

• Brzina svakog elektrona se lako dobije iz poznate kinetičke energije pojedinog elektrona

$$v = \sqrt{\frac{2W}{m}} \quad [2 \text{ BODA}]$$
$$= 1.26 \times 10^{6}\,\text{m/s}. \quad [1 \text{ BOD}]$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Pula, 17.–20. travnja 2018.

4. • Q vrijednost reakcije jednaka je razlici energije mirovanja početne jezgre i produkata. Budući da je raspad krenuo iz pobuđenog stanja, Q vrijednost reakcije je

$$Q = m(^{12}\mathrm{C})c^2 + E^* - 3m(^4\mathrm{He})c^2 \qquad \text{[2 boda]}$$
$$= 4.7\,\mathrm{MeV}. \qquad \text{[1 bod]}$$

Dobivena Q vrijednost je pozitivna, što znači da dolazi do spontanog raspada, i manja je od jednog postotka vrijednosti energije mirovanja alfa-čestice, pa u nastavku koristimo nerelativističke izraze za kinetičku energiju alfa-čestica. [1 bod]

• Zakon očuvanja energije, zapisan preko kinetičkih energija i Q vrijednosti glasi

$$T_1 + T_2 + T_3 = Q \quad \rightsquigarrow \quad t_1 + t_2 + t_3 = 1. \qquad \text{[1 bod]}$$

Sve kinetičke energije možemo odmah izraziti u terminima Dalitzovih varijabli x i y,

$$t_1 = \frac{2+\sqrt{3}x - y}{6}, \quad t_2 = \frac{2-\sqrt{3}x-y}{6}, \quad t_3 = \frac{1+y}{3}. \qquad \text{[3 boda]}$$

Zakon očuvanja količine impulsa glasi

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = \vec{0}, \qquad \text{[1 bod]}$$

jer se početna jezgra raspala iz mirovanja. Da bismo dobili kut između, npr. alfa-čestice 1 i 2, pišemo

$$-\vec{p}_3 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad \rightsquigarrow \quad p_3^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\theta_{12},$$

odakle odmah imamo

$$\cos\theta_{12} = \frac{p_3^2 - p_1^2 - p_2^2}{2p_1p_2} = \frac{t_3 - t_1 - t_2}{2\sqrt{t_1t_2}}, \qquad \text{[2 boda]}$$

te slično i za ostale kutove. Ovdje smo koristili vezu između kinetičke energije i iznosa količine gibanja $p = \sqrt{2mT}$.

• Uvjet na pozitivnost kinetičkih energija vodi na sljedeće uvjete

$$t_1 \geq 0 \iff y \leq 2 + \sqrt{3}x \qquad \text{[1 bod]}$$
$$t_2 \geq 0 \iff y \leq 2 - \sqrt{3}x \qquad \text{[1 bod]}$$
$$t_3 \geq 0 \iff y \geq -1 \qquad \text{[1 bod]}$$

Dobiveno područje predstavlja jednakostraničan trokut u xy ravnini s vrhovima u točkama $(0, 2)$, $(\pm\sqrt{3}, -1)$, kako je prikazano na slici. [2 boda]

• Za uvjet na kut imamo

$$|\cos\theta_{12}| \leq 1 \iff (t_3 - t_1 - t_2)^2 \leq 4t_1t_2 \iff t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 \leq 2(t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1),$$
[2 boda]

a zadnja se nejednakost, koristeći prethodne rezultate, može svesti na uvjet

$$x^2 + y^2 \leq 1, \qquad \text{[2 boda]}$$

što predstavlja jedinični krug u xy ravnini, prikazan na slici. Nije teško vidjeti da je dobiveni krug upisan u prethodno dobiveni trokut, i time smo dobili da je područje Dalitzovih parametara x i y koji su dozvoljeni zakonima očuvanja upravo jednični krug u xy ravnini. Valja napomenuti da je uvjet na kutove simetričan u varijablama t_i pa bismo isti rezultat dobili promatranjem bilo kojeg kuta θ_{ij}.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Pula, 17.–20. travnja 2018.

- Slučaj $t_1 = t_2$ odgovara području $x = 0$ unutar jediničnog kruga, kako je naznačeno na slici. Druga varijabla, y može poprimiti vrijednost $y \in [-1, +1]$, što znači da kinetička energija treće čestice može poprimiti vrijednosti

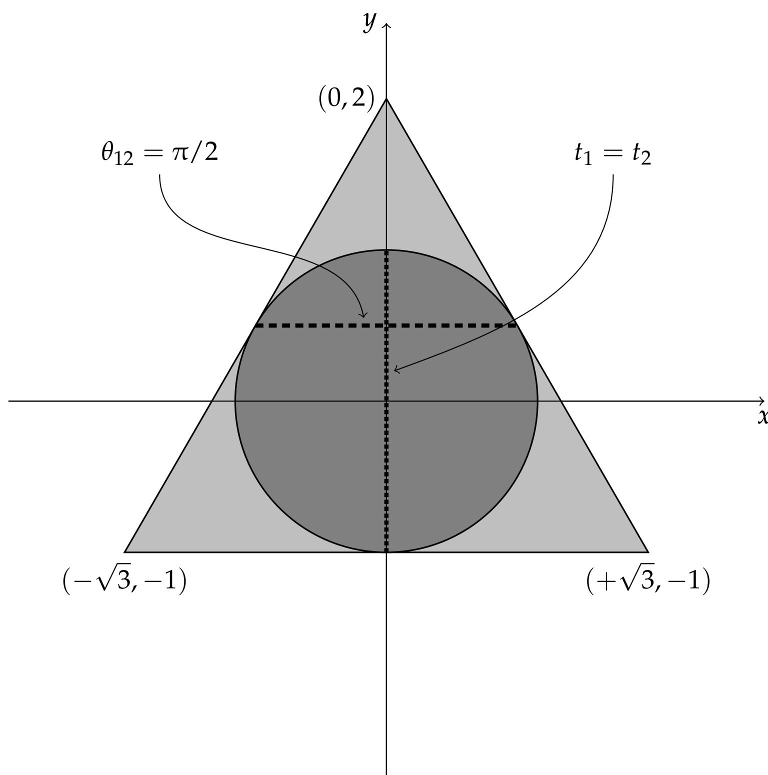
$$t_3 \in [0, 1]. \qquad [2 \text{ BODA}]$$

- Slučaj $\theta_{12} = \pi/2$ daje $\cos\theta_{12} = 0$, odnosno $t_3 = t_1 + t_2$. Ovo pak, u kombinaciji s prethodnom izvedenim rezultatima znači da treća čestica ima fiksnu energiju u ovom slučaju

$$t_3 = \frac{1}{2}. \qquad [1 \text{ BOD}]$$

Dalitzovi parametri poprimaju vrijednosti

$$x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, +\frac{\sqrt{3}}{2}\right], \quad y = \frac{1}{2}. \qquad [1 \text{ BOD}]$$



Slika 1: Dalitzov dijagram

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Poreč, 10.−13. travnja 2019.

Srednje škole - 4. skupina

1. Higgsov bozon h je neutralna čestica mase $m_h c^2 = 125\,\text{GeV}$ koja se u akceleratorima čestica može stvoriti na razne načine, između ostalog i u sudaru dva kvarka. U ovom ćemo zadatku promotriti produkciju Higgsovog bozona uslijed sudara b kvarka sa svojom antičesticom, $\bar{b}$ anti-kvarkom,

$$b\bar{b} \to h.$$

Postoji nekoliko načina kako sudariti kvarkove:

- kvarkove možemo ubrzati do iste brzine v_1 te ih zatim čeono sudariti ili
- možemo jedan kvark (npr. b) ubrzati do brzine v_2 te ga sudariti s drugim mirujućim kvarkom ($\bar{b}$).

Odredite kolike moraju biti brzine v_1 i v_2 da bi došlo do produkcije Higgsovog bozona prilikom sudara u oba slučaja. Izračunajte koliko uložene energije zahtijeva svaki od mehanizama pod pretpostavkom da prije sudara oba kvarka miruju. Prilikom izračuna zanemarite (elektromagnetske itd.) interakcije među kvarkovima prije sudara. Masa b kvarka iznosi $m_b c^2 = 4.5\,\text{GeV}$.

[18 BODOVA]

2. Kvantni sustavi koji se nalaze u pobuđenom stanju nisu stabilni već imaju karakteristično vrijeme života τ. Poznate Heisenbergove relacije tada uvjetuju neodređenost u energiji ΔE pripadnog stanja tako da vrijedi

$$\tau \Delta E = \frac{h}{4\pi}.$$

Drugim riječima, ne možemo točno odrediti energiju pobuđenog stanja, jedino što znamo da ona poprima vrijednosti iz intervala $E \in [\bar{E} - \Delta E/2, \bar{E} + \Delta E/2]$, oko neke srednje vrijednosti $\bar{E}$. Srednju vrijednost energije računamo tako da zanemarujemo nestabilnost pobuđenih stanja. Na primjer, srednje energije stanja vodikovog atoma su dane dobro poznatom jednadžbom

$$\bar{E}_n = -\frac{13.6\,\text{eV}}{n^2},$$

s tim da energija osnovnog stanja nema neodređenost $E_1 = \bar{E}_1 = -13.6\,\text{eV}$. Preciznim mjerenjima spektralnih linija moguće je odrediti neodređenosti u energiji pobuđenih stanja, pa i izračunati njihovo vrijeme života.

U jednom se eksperimentu mjerio spektar plinovitog vodika čiji su atomi bili u pobuđenim stanjima s kvantnim brojevima $n = 2$ i $n = 3$. Dobivene su tri široke spektralne linije sa sljedećim vrijednostima valnih duljina

$$\lambda_1 \in [102.65\,\text{nm}, 102.82\,\text{nm}], \quad \lambda_2 \in [121.75\,\text{nm}, 121.77\,\text{nm}], \quad \lambda_3 \in [653.72\,\text{nm}, 661.38\,\text{nm}].$$

Odredite kojim prijelazima odgovaraju ove linije te izračunajte neodređenosti u energijama za pobuđena stanja, ΔE_2 i ΔE_3, kao i njihova vremena života τ_2 i τ_3.

[16 BODOVA]

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Poreč, 10.–13. travnja 2019.

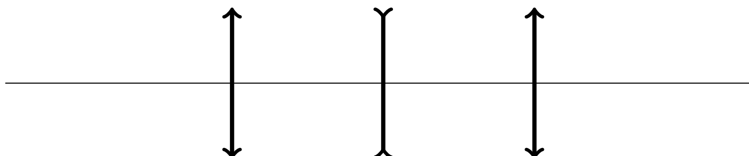
3. Spremnik stalnog volumena sadrži atomski plin vodika gustoće $\rho = 0.1\,\mathrm{g/cm^3}$. Postupnim zagrijavanjem dolazi do ionizacije te se plin pretvara u plazmu, koja se ponaša kao dvokomponentni idealni plin. Pretpostavite da do ionizacije dolazi na točno određenoj temperaturi T_i i ugrubo odredite tu temperaturu. Vodite se idejom da je tipična termalna energija $E_\mathrm{term} \approx kT$ (predfaktori tipa $3/2$ nisu bitni za grubu ocjenu temperature) te da ona uzrokuje ionizaciju. Također, zanemarite utjecaj defekta mase. Dolazi li do promjene tlaka Δp uslijed ionizacije? Ako da, izračunajte tu promjenu. Daljnjim zagrijavanjem plazme, na stijenke spremnika, osim same plazme, sve više djeluje i tlak termičkog zračenja. Veza između tlaka zračenja i temperature T dana je formulom

$$p_\mathrm{rad} = \frac{4\sigma}{3c}T^4,$$

gdje su σ i c fundamentalne konstante. U trenutku kad se tlakovi plazme i zračenja izjednače dolazi do pucanja spremnika. Odredite na kojoj temperaturi spremnik puca te koji je tlak u tom trenu djelovao na njegove stijenke.

[18 BODOVA]

4. Optički sustav od tri tanke leće konstruiran je kao na slici. Dvije su leće konvergentne, dok je jedna divergentna, a sve imaju istu žarišnu duljinu $f = 10\,\mathrm{cm}$. Konvergentne leće su udaljene za $\ell = 10\,\mathrm{cm}$, a divergentna leća se nalazi točno na polovici između njih.



- Ako snop svjetlosti upada s lijeva na prvu leću paralelno optičkoj osi, nađite udaljenost d od treće leće do točke na optičkoj osi gdje snop konvergira.
- Ako se točkasti predmet stavi na optičku os na udaljenosti x ispred prve leće, a njegova slika nastaje na istoj udaljenosti iza treće leće, odredite x.

[18 BODOVA]

Vrijednosti fizikalnih konstanti:

- brzina svjetlosti: $c = 3.00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$;
- masa elektrona: $m_\mathrm{e} = 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$;
- masa protona: $m_\mathrm{p} = 1.67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$;
- Planckova konstanta: $h = 6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s} = 4.14 \times 10^{-15}\,\mathrm{eV\,s}$;
- Boltzmannova konstanta: $k = 1.38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K} = 8.62 \times 10^{-5}\,\mathrm{eV/K}$;
- Stefan-Boltzmannova konstanta: $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\,\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Poreč, 10.−13. travnja 2019.

Srednje škole - 4. skupina, rješenja i smjernice za bodovanje

Upute za bodovanje: Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ukoliko učenici riješe zadatak drugačijim, a fizikalno ispravnim načinom, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

1. • Ako se dva kvarka čeono sudaraju istom brzinom tada će, zbog zakona očuvanja količine gibanja, nužno stvoriti Higgsov bozon u mirovanju. [1 BOD]

   Prema tome, energija svakog kvarka prije sudara mora biti

$$E = \gamma_1 m_b c^2 = \frac{1}{2} m_h c^2. \quad [2\ \text{BODA}]$$

   Iz toga slijedi

$$v_1 = c\sqrt{1 - \left(\frac{2m_b}{m_h}\right)^2} \quad [2\ \text{BODA}]$$

$$= 2.9922 \times 10^8\,\text{m/s}. \quad [1\ \text{BOD}]$$

   Pritom je potrebno uložiti energiju jednaku zbroju kinetičke energije oba kvarka

$$T_1 = m_h c^2 - 2m_b c^2 \quad [2\ \text{BODA}]$$

$$= 116\,\text{GeV}. \quad [1\ \text{BOD}]$$

   • Ako pak sudaramo jedan kvark u drugi, mirujući, kvark, tada će se stvoreni Higgsov bozon gibati. Najlakši način da odredimo parametre ovog sudara jest da napravimo Lorentzovu transformaciju prethodnog slučaja. [1 BOD]

   U sustavu koji se giba brzinom v_1 anti-kvark će mirovati, a kvark će imati brzinu

$$v_2 = \frac{2v_1}{1 + \frac{v_1^2}{c^2}} = c\frac{\sqrt{1 - \left(\frac{2m_b}{m_h}\right)^2}}{1 - 2\left(\frac{m_b}{m_h}\right)^2} \quad [3\ \text{BODA}]$$

$$= 2.9999 \times 10^8\,\text{m/s}. \quad [1\ \text{BOD}]$$

   Budući da se Higgsov bozon nakon sudara giba brzinom v_1, uložena energija, tj. kinetička energija kvarka, u ovom slučaju je

$$T_2 = \gamma_1 m_h c^2 - 2m_b c^2 = \frac{(m_h^2 - 4m_b^2)c^2}{2m_b} \quad [3\ \text{BODA}]$$

$$= 1.7271\,\text{TeV}. \quad [1\ \text{BOD}]$$

   Očito, čeoni sudar zahtijeva manje uložene energije.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Poreč, 10.–13. travnja 2019.

2. Za početak izračunamo valnu duljinu prijelaza $n \to m$ zanemarujući neodređenost u energiji. Iz formule

$$\lambda_{n\to m} = \frac{hc}{\bar{E}_n - \bar{E}_m} \qquad [2 \text{ boda}]$$

lako nalazimo

$$\lambda_{2\to 1} = 121.76\,\text{nm}, \quad \lambda_{3\to 1} = 102.74\,\text{nm}, \quad \lambda_{3\to 2} = 657.53\,\text{nm}. \qquad [3 \text{ boda}]$$

Prema tome, zaključujemo da spektralna linija λ_1 odgovara prijelazu $3 \to 1$, λ_2 prijelazu $2 \to 1$, a λ_3 prijelazu $3 \to 2$. [1 BOD]

Dalje, širine pobuđenih stanja računamo prema

$$\Delta E_2 = h\Delta\nu_{2\to 1} = hc\left(\frac{1}{\lambda_{2,\text{min}}} - \frac{1}{\lambda_{2,\text{max}}}\right) \qquad [2 \text{ boda}]$$

$$= 1.68\,\text{meV}, \qquad [1 \text{ bod}]$$

za $n = 2$, odnosno

$$\Delta E_3 = h\Delta\nu_{3\to 1} = hc\left(\frac{1}{\lambda_{1,\text{min}}} - \frac{1}{\lambda_{1,\text{max}}}\right) \qquad [2 \text{ boda}]$$

$$= 0.02\,\text{eV}, \qquad [1 \text{ bod}]$$

za $n = 3$. Konačno, vremena života su

$$\tau_2 = \frac{h/4\pi}{\Delta E_2} = 1.96 \times 10^{-13}\,\text{s}, \quad \tau_3 = \frac{h/4\pi}{\Delta E_3} = 1.65 \times 10^{-14}\,\text{s}. \qquad [4 \text{ boda}]$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Poreč, 10.−13. travnja 2019.

3. Tempreraturu ionizacije možemo procijeniti iz uvjeta da termička energija kT bude jednaka energiji vezanja vodika $E_{\mathrm{vez}} = 13.6\,\mathrm{eV}$,

$$E_{\mathrm{term}} = E_{\mathrm{vez}} \quad \rightsquigarrow \quad T_{\mathrm{i}} = \frac{E_{\mathrm{vez}}}{k} = 1.58 \times 10^{5}\,\mathrm{K}. \qquad [4 \text{ BODA}]$$

Tlak vodika prije ionizacije računamo iz jednadžbe stanja idealnog plina

$$p_{\mathrm{vod}} = \frac{N}{V} k T_{\mathrm{i}}, \qquad [2 \text{ BODA}]$$

gdje je N broj atoma vodika u spremniku volumena V, dok, nakon ionizacije, tlak plazme računamo pomoću Daltonovog zakona o parcijalnim tlakovima gdje posebno promatramo pozitivne (protone) i negativne (elektrone) ione kao idealni plin. Budući da iz svakog vodika dobijemo jedan proton i jedan elektron, broj protona je opet N, što je ujedno i broj elektrona. Budući da i protoni i elektroni ispunjavaju spremnik te se nalaze na istoj temperaturi, vrijedi

$$p_{\mathrm{pl}} = \frac{N}{V} k T_{\mathrm{i}} + \frac{N}{V} k T_{\mathrm{i}} = 2 p_{\mathrm{vod}}. \qquad [3 \text{ BODA}]$$

Prema tome, promjena u tlaku tijekom ionizacije iznosi

$$\begin{aligned} \Delta p = p_{\mathrm{pl}} - p_{\mathrm{vod}} = p_{\mathrm{vod}} &= \frac{N m_{\mathrm{v}}}{V m_{\mathrm{v}}} k T_{\mathrm{i}} \\ &= \frac{\rho}{m_{\mathrm{v}}} k T_{\mathrm{i}} && [2 \text{ BODA}] \\ &= 1.30 \times 10^{11}\,\mathrm{Pa}. && [1 \text{ BOD}] \end{aligned}$$

U predzadnjoj smo jednakosti uveli gustoću vodika $\rho = N m_{\mathrm{v}} / V$ i masu atoma vodika $m_{\mathrm{v}} = m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{e}}$.

Tlak plazme i tlak zračenja će biti jednaki na temperaturi određenoj uvjetom

$$\frac{4\sigma}{3c} T^4 = \frac{2\rho}{m_{\mathrm{v}}} k T \quad \rightsquigarrow \quad T = \left(\frac{3\rho c k}{2\sigma m_{\mathrm{v}}} \right)^{1/3} = 1.87 \times 10^{7}\,\mathrm{K}. \qquad [3 \text{ BODA}]$$

Pri toj temperaturi ukupni je tlak na stijenku spremnika

$$p_{\mathrm{uk}} = p_{\mathrm{pl}} + p_{\mathrm{rad}} = \frac{4\rho}{m_{\mathrm{v}}} k T = 6.18 \times 10^{13}\,\mathrm{Pa}. \qquad [3 \text{ BODA}]$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Poreč, 10.–13. travnja 2019.

4. • Koristimo jednadžbu tankih leća za svaku leću posebno. Ako svjetlost upada paralelno na prvu leću, to znači da se izvor nalazi u beskonačnosti, $a_1 = \infty$, pa imamo

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f} \quad \rightsquigarrow \quad b_1 = f = 10\,\text{cm}. \qquad [3 \text{ BODA}]$$

Slika prve leće je izvor za drugu leću i nalazi se na udaljenosti $a_2 = -(b_1 - \ell/2)$ od nje. Prema tome, jednadžba leće daje

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = -\frac{1}{f} \quad \rightsquigarrow \quad b_2 = -\frac{a_2 f}{a_2 + f} = 10\,\text{cm}, \qquad [3 \text{ BODA}]$$

gdje smo vodili računa da je druga leća divergentna. Konačno, izvor za treću leću je na udaljenosti $a_3 = -(b_2 - \ell/2)$ od nje pa je konačni položaj slike

$$\frac{1}{a_3} + \frac{1}{b_3} = \frac{1}{f} \quad \rightsquigarrow \quad b_3 = \frac{a_3 f}{a_3 - f} = 3.33\,\text{cm}. \qquad [3 \text{ BODA}]$$

• Da bi optički sustav napravio simetričnu sliku, nužno je da i središnja leća napravi simetričnu sliku. Odnosno, mora vrijediti

$$|a_2| = |b_2| = 2f = 10\,\text{cm}. \qquad [3 \text{ BODA}]$$

Sad je lako vidjeti da je, npr.

$$b_1 = |a_2| + \ell/2 = 25\,\text{cm}, \qquad [3 \text{ BODA}]$$

pa jednadžba leće za prvu leću daje, uz $a_1 = x$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f} \quad \rightsquigarrow \quad x = \frac{b_1 f}{b_1 - f} = 16.67\,\text{cm}. \qquad [3 \text{ BODA}]$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

19.-20. studeni 2020.

Srednje škole - 4. skupina

1. Elastični sudar neutrona n i neutralnog piona π^0 ima sljedeće zanimljivo svojstvo: U laboratorijskom sustavu gdje pion miruje, a neutron nalijeće na njega, neutron se ne može raspršiti pod kutom većim od $\theta_{\mathrm{max}} = 8.25°$ u odnosu na početni smjer gibanja, neovisno o (relativističkoj) brzini kojom nalijeće na pion. Ako vam je poznata masa neutrona $m_n = 940\,\mathrm{MeV}/c^2$, odredite masu neutralnog piona m_π (u istim mjernim jedinicama).

   Uputa: za računanje ekstrema koristite derivacije.

   [22 BODOVA]

2. Promotrite kvantnu česticu mase m koja se giba u jednoj dimenziji tako da su joj položaj i količina gibanja neodređeni prema Heisenbergovoj relaciji $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$. Odredite pri kojoj će minimalnoj neodređenosti u položaju, neodređenost u energiji čestice biti $\Delta E = mc^2$. Interpretirajte dobiveni rezultat. Prilikom računa možete pretpostaviti da je neodređenost u količini gibanja Δp usporediva sa samom vrijednošću p.

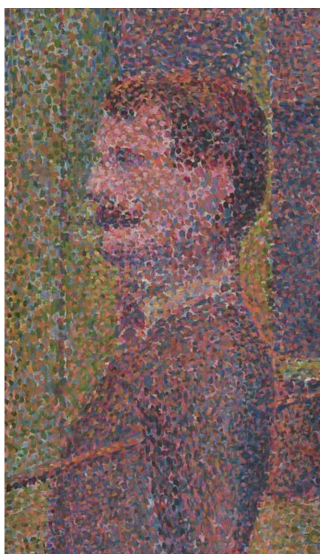
   [14 BODOVA]

3. U krvotok osobe ubrizga se mala količina otopine koja sadrži radionuklid ^{24}Na vremena poluživota $T = 15\,\mathrm{h}$. Ako je aktivnost (broj raspada u sekundi) ubrizganog radionuklida $A = 2000\,\mathrm{s}^{-1}$, dok aktivnost uzorka krvi volumena $V' = 1\,\mathrm{cm}^3$, uzetog $t = 5\,\mathrm{h}$ nakon ubrizgavanja radionuklida, iznosi $A' = 16\,\mathrm{min}^{-1}$, odredite ukupni volumen V ljudskog krvotoka.

   [18 BODOVA]

4. Georges Seurat, čuveni francuski slikar postimpresionističkog doba, razvio je tehniku slikanja poznatu pod nazivom poentilizam. U toj se tehnici malim jasnim točkama (približnog promjera $d = 2\,\mathrm{mm}$) osnovnih boja stvara dojam velikog broja sekundarnih i ostalih boja. Odredite s koje se minimalne udaljenosti L mora gledati ova slika kako se ne bi opazila njena zrnata struktura? Uzmite da je srednja valna duljina svjetlosti $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$, a promjer zjenice $D = 4\,\mathrm{mm}$.

   [16 BODOVA]



Detalj sa slike *Parade de cirque* (1887–88).

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

19.-20 studeni 2020.

Srednje škole - 4. skupina, rješenja i smjernice za bodovanje

Upute za bodovanje: Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ukoliko učenici riješe zadatak drugačijim, a fizikalno ispravnim načinom, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

1. Neka je $\vec{p}$ količina gibanja neutrona prije raspršenja, $\vec{p}'$ količina gibanja nakon raspršenja, a $\vec{p}''$ količina gibanja piona nakon raspršenja. Tada možemo pisati zakon očuvanja količine gibanja

$$\vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}''. \qquad \text{[2 BODA]}$$

Ako $\vec{p}'$ prebacimo na lijevu stranu i kvadriramo, dobijemo

$$p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\theta = p''^2, \qquad \text{[2 BODA]}$$

gdje je θ kut raspršenja neutrona. Ako sad iskoristimo vezu između energije i količine gibanja,

$$E^2 = (m_n c^2)^2 + (pc)^2, \quad E'^2 = (m_n c^2)^2 + (p'c)^2, \quad E''^2 = (m_\pi c^2)^2 + (p''c)^2, \qquad \text{[3 BODA]}$$

imamo

$$E^2 + E'^2 - 2(m_n c^2)^2 - 2\sqrt{E^2 - (m_n c^2)^2}\sqrt{E'^2 - (m_n c^2)^2}\cos\theta = E''^2 - (m_\pi c^2)^2. \qquad \text{[2 BODA]}$$

Konačno, ako još iskoristimo zakon očuvanja energije

$$E + m_\pi c^2 = E' + E'', \qquad \text{[2 BODA]}$$

dolazimo do relacije koja povezuje kut raspršenja θ s energijama E i E',

$$\cos\theta = \frac{EE' - (E - E')(m_\pi c^2) - (m_n c^2)^2}{\sqrt{E^2 - (m_n c^2)^2}\sqrt{E'^2 - (m_n c^2)^2}}. \qquad \text{[2 BODA]}$$

Za fiksnu upadnu energiju E, nađimo vrijednost raspršene energije E' za koju je $\cos\theta$ ekstremalan. Derivirajmo, stoga, gornju relaciju po E' i izjednačimo s nulom,

$$\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}E'} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad E' = \frac{(E + m_\pi c^2)(m_n c^2)^2}{E m_\pi c^2 + (m_n c^2)^2}. \qquad \text{[4 BODA]}$$

Dobiveni izraz uvrstimo u izraz za $\cos\theta$ i dobijemo

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{m_\pi}{m_n}\right)^2} \quad \rightsquigarrow \quad \theta_{\max} = \arcsin\frac{m_\pi}{m_n} \qquad \text{[3 BODA]}$$

Budući da dobiveni izraz ne ovisi o upadnoj energiji E, vrijedi na svim upadnim energijama. Vidimo da ovaj kut ima smisla samo za $m_\pi \leq m_n$. Prema tome, granični kut raspršenja može postojati samo u slučaju kad teža čestica upada na lakšu česticu, što je i intuitivno. Konačno, masa neutralnog piona je

$$m_\pi = m_n \sin\theta_{\max} = 135\,\mathrm{MeV}/c^2. \qquad \text{[2 BODA]}$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

On-line, 19.–20. studenog 2020.

2. Pošto tražimo minimalnu neodređenost u položaju, pisat ćemo jednakost u Heisenbergovim relacijama i povezati neodređenost u količini gibanja s neodređenosti u položaju na način

$$\Delta p = \frac{\hbar}{2\Delta x}.$$ [3 BODA]

Budući da se od nas traži neodređenost u energiji koja je jednaka energiji mirovanja, koristimo relativističku vezu između energije i količine gibanja

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2.$$ [2 BODA]

Odavde je jasno da je veza između neodređenosti u energiji i količini gibanja,

$$(\Delta E)^2 = (\Delta pc)^2.$$ [3 BODA]

Prema tome, imamo

$$\Delta E = mc^2 \quad \rightsquigarrow \quad \Delta p = mc.$$ [2 BODA]

Odnosno, minimalna neodređenost u položaju koja vodi do tražene neodređenosti u energiji je

$$\Delta x = \frac{1}{2}\frac{\hbar}{mc}.$$ [2 BODA]

Veličina $\hbar/(mc)$ se naziva Comptonova valna duljina. Ona nam govori da je neodređenost u energiji na tako niskim skalama dovoljno velika da može doći do spontanog stvaranja novih čestica. [2 BODA]

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

On-line, 19.–20. studenog 2020.

3. Prema zakonu radioaktivnog raspada, broj neraspadnutih jezgri u trenutku t je povezan s početnim brojem jezgri N_0 formulom

$$N(t) = N_0\, 2^{-t/T}, \qquad [3 \text{ BODA}]$$

gdje je T vrijeme poluživota nestabilnih jezgri. Aktivnost uzorka u svakom trenu, $A(t)$ je broj jezgri koje se raspadnu u sekundi,

$$A(t) = -\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\ln 2}{T} N(t). \qquad [4 \text{ BODA}]$$

Prema tome, aktivnost uzorka u početnom trenu je

$$A = \frac{\ln 2}{T} N(0) = \frac{\ln 2}{T} N_0, \qquad [3 \text{ BODA}]$$

dok je aktivnost u uzorku izvađenom nakon nekog vremena

$$A' = \frac{\ln 2}{T} N(t) \times \frac{V'}{V} = \frac{V'}{V} \frac{\ln 2}{T} N_0\, 2^{-t/T}, \qquad [4 \text{ BODA}]$$

gdje je V'/V udio uzorka krvi u cijelom krvotoku. Ovdje smo pretpostavili da se radionukleid ravnomjerno proširio krvotokom. Sad možemo eliminirati nepoznanicu N_0 i dobiti ukupni volumen krvotoka

$$V = V' \frac{A}{A'} 2^{-t/T} \qquad [2 \text{ BODA}]$$

$$= 6\,\mathrm{l}. \qquad [2 \text{ BODA}]$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

On-line, 19.–20. studenog 2020.

4. Dvije točkice boje na platnu možemo shvatiti kao dva odvojena izvora svjetlosti. Ako su točkice gusto poslagane, tada će dvije susjedne točkice biti udaljene za svoj promjer, d. Prema tome, moramo odrediti na kojoj će maksimalnoj udaljenosti od platna biti moguće razlučiti dva izvora svjetlosti na udaljenosti d, pod pretpostavkom da je platno točno ispred nas. [3 BODA]

Da bismo to odredili, koristimo standardni uvjet razlučivosti koji kaže da su dva izvora svjetlosti razlučiva ako, iz točke promatranja, razapinju kut

$$\theta \geq 1.22\frac{\lambda}{D}, \qquad [3\ \text{BODA}]$$

gdje je λ valjna duljina svjetlosti, a D promjer otvora optičkog sustava, u ovom slučaju oka. Ako uvrstimo poznate veličine, lako je dobiti vrijednost minimalnog kuta θ_{min} pri kojem možemo (granično) razlučiti dva izvora svjetlosti

$$\begin{aligned}\theta_{\text{min}} &= 1.22\frac{\lambda}{D} \\ &= 1.53 \times 10^{-4}\,\text{rad}.\end{aligned} \qquad [3\ \text{BODA}]$$

Vidimo da se radi o jako malom kutu, tako da u nastavku možemo koristiti aproksimaciju malog kuta. Ako se nalazimo na udaljenosti L od platna, te promatramo dvije točkice boje međusobno udaljene za d, vrijedi

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{d}{2L}, \qquad [3\ \text{BODA}]$$

odnosno, u aproksimaciji malog kuta

$$\theta \approx \frac{d}{L}. \qquad [2\ \text{BODA}]$$

Prema tome, minimalna udaljenost na kojoj nećemo vidjeti zrnatu strukturu slike je

$$\begin{aligned}L_{\text{min}} &= \frac{d}{\theta_{\text{min}}} \\ &= 13.11\,\text{m}.\end{aligned} \qquad [2\ \text{BODA}]$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

On-line, 28.–29. travnja 2021.

Srednje škole - 4. skupina

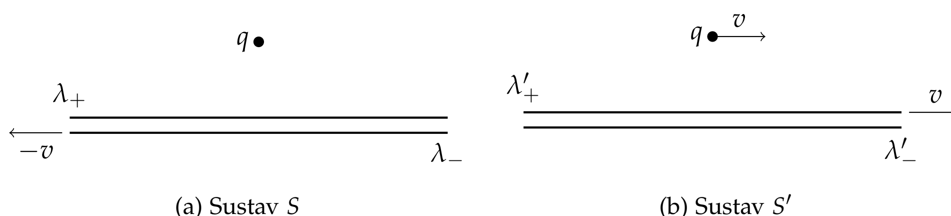
1. Svjetlost koja se sastoji od dvije monokromatske komponente valnih duljina λ i λ' upada okomito na difrakcijsku rešetku konstante $d = 1.7\,\mu$m, te se mjere maksimumi difrakcije (s iste strane središnjeg maksimuma) na pripadnim kutovima α_k i α'_k. Mjerenjima je utvrđeno da vrijedi $\alpha_2 - \alpha'_1 = 8°$, te $\alpha_3 = \alpha'_2$. Iz ovih podataka odredite λ i λ' te sve kutove na kojima se javljaju difrakcijski maksimumi.

[16 BODOVA]

2. Promotrimo jako dugi neutralni ravni vodič koji nosi struju I iz perspektive nekog laboratorijskog sustava S. Takav vodič možemo modelirati kao superpoziciju pozitivno nabijenog pravca homogene linearne gustoće naboja λ_+ koji miruje i negativno nabijenog pravca gustoće $\lambda_- = -\lambda_+$ koji se giba brzinom $-v$ kao na slici i stvara struju $I = -\lambda_- v$. Ako se u blizini takvog vodiča, na udaljenosti d, nalazi mirujući točkasti naboj q, tada su električna i magnetska sila na taj naboj jednake nuli. Međutim, ako istu situaciju pogledamo iz drugog inercijalnog sustava S' u kojem negativno nabijeni pravac miruje, a pozitivno nabijeni pravac i točkasti naboj se gibaju brzinom v udesno, tada, naizgled, na naboj q u gibanju djeluje samo magnetska sila, pa bi se naboj trebao otkloniti od vodiča.

Da biste riješili ovaj paradoks, pretpostavite da je sila na točkasti naboj dana izrazom $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ u svim inercijalnim sustavima, ali da gustoća naboja pravca ovisi o brzini kojom se pravac giba na način $\lambda(v) = \lambda_0 f(v)$, gdje je λ_0 gustoća naboja u sustavu mirovanja. Iz uvjeta da se točkasti naboj ne udaljava od vodiča u oba referentna sustava, odredite oblik funkcije $f(v)$.

Električno polje pravca je $E = \lambda/(2\pi\epsilon_0 r)$, gdje je λ linearna gustoća naboja, a r udaljenost od pravca.



(a) Sustav S (b) Sustav S'

[20 BODOVA]

3. Elektron se nalazi u $n = 5$ energijskom stanju vodikovog atoma. Odredite na koliko se različitih načina elektron može spustiti u osnovno $n = 1$ stanje. Koliko je različitih valnih duljina fotona moguće opaziti u tom procesu? Odredite im vrijednosti u nanometrima.

Atomski su prijelazi često uvjetovani tzv. izbornim pravilima. Kako bi se promjenio rezultat prvog dijela zadatka, ako elektronski prijelazi između dva stanja $n \to m$ moraju zadovoljavati izborno pravilo prema kojem brojevi n i m moraju biti različite parnosti? Energija osnovnog stanja vodikovog atoma iznosi $E = -13.6\,$eV.

[20 BODOVA]

Okrenite stranicu ⟶

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

On-line, 28.– 29. travnja 2021.

Srednje škole - 4. skupina

4. Banana srednje veličine sadrži $m = 425\,\mathrm{mg}$ kalija, od čega 0.012% u obliku radioaktivnog izotopa vremena poluraspada $T = 1.25 \times 10^9$ godina. Odredite koliko banana čovjek smije pojesti odjednom prije nego osjeti efekte radioaktivnog zračenja. Zračenje aktivnosti $A_0 = 5 \times 10^8\,\mathrm{Bq}$ smatra se opasnim. Molarna masa radioaktivnog izotopa kalija je $M = 40\,\mathrm{g/mol}$.

[14 BODOVA]

Vrijednosti fizikalnih konstanti:

- brzina svjetlosti: $c = 3.00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$;
- elementarni naboj: $e = 1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$;
- Planckova konstanta: $h = 6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s} = 4.14 \times 10^{-15}\,\mathrm{eV\,s}$;
- Avogadrova konstanta: $N_\mathrm{A} = 6.02 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$;

VAŽNO: Tijekom ispita ne smijete imati nikakav pisani materijal (knjige, bilježnice, formule). Za pisanje, koristite kemijsku olovku ili nalivpero. Pri ruci ne smijete imati mobitele ni druge elektroničke uređaje osim kalkulatora.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

On-line, 28.–29. travnja 2021.

Srednje škole - 4. skupina, rješenja i smjernice za bodovanje

Upute za bodovanje: Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ukoliko učenici riješe zadatak drugačijim, a fizikalno ispravnim načinom, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

1. Označimo s α_n kutove koji odgovaraju difrakcijskim maksimumima svjetlosti valne duljine λ, a s α'_n pripadne kutove koji odgovaraju svjetlosti valne duljine λ'. Ovi kutovi su određeni uvjetima

$$d \sin \alpha_n = n\lambda, \quad d \sin \alpha'_m = m\lambda'. \qquad [2\ \text{BODA}]$$

Iz uvjeta $\alpha_3 = \alpha'_2$ odmah možemo zaključiti kako se odnose valne duljine

$$3\lambda = 2\lambda' \quad \rightsquigarrow \quad \lambda' = \eta\lambda. \qquad [2\ \text{BODA}]$$

Ovdje smo uveli pokratu $\eta = \lambda'/\lambda = 1.5$. U zadatku nam je zadan kut

$$\beta = \alpha_n - \alpha'_m.$$

za $n = 2$ i $m = 1$. Ove kutove možemo povezati i kombinirajući jednadžbe koje određuju difrakcijske maksimume

$$\frac{1}{n} \sin \alpha_n = \frac{1}{\eta m} \sin \alpha'_m. \qquad [2\ \text{BODA}]$$

Ako uvrstimo $\alpha_n = \beta + \alpha'_m$, dolazimo do jednadžbe iz koje možemo odrediti kut α_n,

$$\operatorname{tg} \alpha'_m = \frac{\eta m \sin \beta}{n - \eta m \cos \beta}. \qquad [3\ \text{BODA}]$$

Konkretno,

$$\alpha'_1 = \operatorname{arctg} \left(\frac{1.5 \sin \beta}{2 - 1.5 \cos \beta} \right) = 22.1^\circ. \qquad [1\ \text{BOD}]$$

Sad možemo odmah odrediti i valne duljine svjetlosti

$$\lambda' = d \sin \alpha'_1 = 639.6\,\text{nm}, \quad \lambda = \frac{2}{3}\lambda' = 426.4\,\text{nm}. \qquad [3\ \text{BODA}]$$

Prema tome, svi difrakcijski maksimumi se nalaze na kutovima

$$\alpha_1 = 14.5^\circ, \quad \alpha_2 = 30.1^\circ, \quad \alpha_3 = 48.8^\circ, \quad \alpha'_1 = 22.1^\circ, \quad \alpha'_2 = 48.8^\circ. \qquad [3\ \text{BODA}]$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

On-line, 28.–29. travnja 2021.

2. U sustavu S' pripadne gustoće naboja su

$$\lambda'_+ = f(v)\lambda_+, \quad \lambda'_- = \frac{\lambda_-}{f(v)} = -\frac{\lambda_+}{f(v)}, \qquad [4 \text{ BODA}]$$

jer se sada pozitivan pravac giba, a negativan miruje. Prema tome, električna sila na naboj je

$$F_\mathrm{e} = \frac{q\lambda_+}{2\pi\epsilon_0 d}\left[f(v) - \frac{1}{f(v)}\right] = \frac{q\lambda_+}{2\pi\epsilon_0 d}\frac{f(v)^2 - 1}{f(v)}. \qquad [4 \text{ BODA}]$$

S druge strane, struja u sustavu S' je

$$I' = \lambda'_+ v = \lambda_+ f(v) v, \qquad [2 \text{ BODA}]$$

i ona je uzrok magnetske sile na naboj q

$$F_\mathrm{m} = \frac{\mu_0 I'}{2\pi d}(qv) = \frac{\mu_0 q\lambda_+}{2\pi d} f(v) v^2. \qquad [4 \text{ BODA}]$$

Da se naboj ne bi udaljavao od vodiča, ove dvije sile moraju biti iste, ali suprotnog smjera, što je lako utvrditi da je ispunjeno koristeći pravilo desne ruke. [2 BODA]

Prema tome, kad izjednačimo sile, dobijemo traženi oblik funkcije $f(v)$

$$f(v)^2 - 1 = f(v)^2(\mu_0\epsilon_0 v^2) \quad \rightsquigarrow \quad f(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \mu_0\epsilon_0 v^2}}. \qquad [4 \text{ BODA}]$$

Kako je $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$, vidimo da se radi o Lorentzovom faktoru $f(v) = \gamma(v)$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

On-line, 28.–29. travnja 2021.

3. Bez ikakvih izbornih pravila, elektronski prijelazi se mogu dogoditi između bilo koja dva energijska stanja. Prema tome, ako je početno stanje $n = 5$, a konačno $m = 1$, mogući su sljedeći prijelazi, sveukupno njih osam

$$5 \to 1$$
$$5 \to 2 \to 1, \quad 5 \to 3 \to 1, \quad 5 \to 4 \to 1$$
$$5 \to 4 \to 3 \to 1, \quad 5 \to 4 \to 2 \to 1, \quad 5 \to 3 \to 2 \to 1$$
$$5 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$$

[4 BODA]

U ovim se prijelazima oslobađa sveukupno deset fotona različitih valnih duljina, a koje računamo po formuli

$$\lambda_{n\to m} = \frac{hc}{E_n - E_m} = \frac{hc}{E/n^2 - E/m^2} = \frac{n^2 m^2}{n^2 - m^2}\frac{hc}{-E}.$$

[4 BODA]

Dobivene vrijednosti za valne su

$$\lambda_{5\to1} = 95\,\text{nm}, \quad \lambda_{4\to1} = 98\,\text{nm}, \quad \lambda_{3\to1} = 103\,\text{nm}, \quad \lambda_{2\to1} = 122\,\text{nm}, \quad \lambda_{5\to2} = 435\,\text{nm},$$
$$\lambda_{4\to2} = 488\,\text{nm}, \quad \lambda_{3\to2} = 658\,\text{nm}, \quad \lambda_{5\to3} = 1285\,\text{nm}, \quad \lambda_{4\to3} = 1880\,\text{nm}, \quad \lambda_{5\to4} = 4063\,\text{nm}.$$

[10 BODOVA]

Ako nametnemo izborno pravilo da prijelazi elektrona moraju povezati stanja različite parnosti, moramo eliminirati prijelaze $5 \to 3$, $5 \to 1$, $4 \to 2$ i $3 \to 1$, a time i pripadne fotone. Dakle, u slučaju izbornog pravila možemo opaziti samo šest od početnih deset fotona, a koji su rezultati sljedećih triju prijelaza

$$5 \to 2 \to 1, \quad 5 \to 4 \to 1, \quad 5 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1.$$

[2 BODA]

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

On-line, 28.–29. travnja 2021.

Srednje škole - 4. skupina, rješenja i smjernice za bodovanje

4. Masa radioaktivnog izotopa kalija u jednoj banani je

$$m' = m \times 0.00012 = 5.1 \times 10^{-8}\,\mathrm{kg}.$$ [3 BODA]

Toj masi odgovara broj radioaktivnih jezgri

$$N = \frac{m'}{M} N_\mathrm{A} = 7.68 \times 10^{17}.$$ [3 BODA]

Poznavajući vrijeme poluraspada, možemo odrediti aktivnost jedne banane

$$A = N \frac{\ln 2}{T} = 13.5\,\mathrm{Bq}.$$ [4 BODA]

Prema tome, čovjek bi odjednom trebao pojesti

$$n = \frac{A_0}{A} = 3.7 \times 10^7$$ [4 BODA]

banana da osjeti posljedice radioaktivnosti.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE 2021/2022

Srednje škole - 4. grupa

VAŽNO: Tijekom ispita ne smijete imati nikakav pisani materijal (knjige, bilježnice, formule...). Za pisanje koristite kemijsku olovku ili nalivpero. Ne smijete imati mobitele ni druge elektroničke uređaje. Dozvoljeno je korištenje kalkulatora.

1. zadatak *(16 bodova)*

Elektron se može slobodno gibati unutar efektivno dvodimenzionalnog volumena oblika pravokutnika dimenzija $a = 6\,\text{nm}$ i $b = 4\,\text{nm}$. Koje su energije fotona potrebne da elektron iz najnižeg energetskog stanja prijeđe direktno u prva tri pobuđena stanja? Rezultate izrazite u meV-ima!

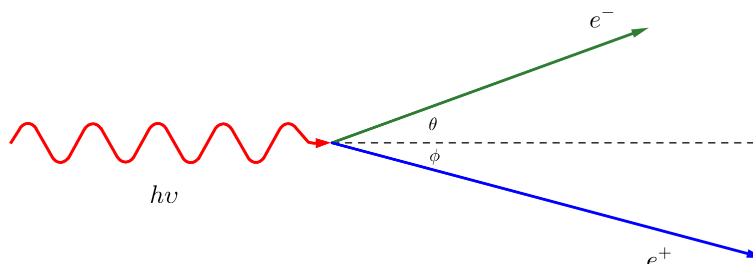
2. zadatak *(14 bodova)*

Na slici 1. prikazan je raspad fotona na elektron-pozitron par. Pozitron i elektron imaju jednake mase, ali suprotne naboje.

a) Napišite zakone očuvanja energije i impulsa za ovaj proces i pokažite da on nije moguć u vakuumu!

b) Ovakvi procesi raspada fotona mogući su u blizini atomske jezgre čime i ona putem elektromagnetske interakcije dobije dio impulsa upadnog fotona. Komadić olova dimenzija $5\,\text{cm} \times 5\,\text{cm} \times 5\,\text{mm}$ izlažemo γ-zračenju valne duljine $1.24 \times 10^{-2}\,\text{pm}$ intenziteta $0.1\,\text{Wm}^{-2}$ tako da je upadna površina zračenja na olovo maksimalna. Koliki je intenzitet γ-zračenja iza komadića olova ako on slijedi ovisnost $I = I_0\, e^{-\mu x}$, gdje je $\mu = 1.05\,\text{cm}^{-1}$ linearni koeficijent atenuacije zračenja kroz olovo, a x put koji zračenje prođe kroz materijal? Za ovako energetično zračenje snop gubi intenzitet gotovo isključivo zbog produkcije elektron-pozitron parova u olovu, tj. drugi efekti kao fotoelektrični efekt ili Comptonov efekt su zanemarivi.

c) Odredi ukupnu deponiranu energiju u tom komadiću olova ako je bio izložen zračenju 5 h. Pretpostavite da su svi nastali elektroni i pozitroni ostali vezani u materijalu!



Slika 1: Raspad fotona na elektron-pozitron par.

3. zadatak *(20 bodova)*

Dana je trostrana prizma kao na slici 2. Ona je usmjerena tako da su joj baze paralelne s $x-y$ ravninom, te najveća stranica plašta gleda u pozitivnom smjeru x-osi. Ishodište koordinatnog sustava je u točki O. Baza je jednakokračni trokut čija je najveća duljina dana sa $2h$, a kutevi uz tu stranicu jednaki su α. Visina prizme je v, gustoća ρ i indeks loma n, a indeks loma sredstva u kojem se prizma nalazi je 1. Jedna od dvije manje stranice plašta (ona koja je donja na prikazanoj slici) obasjana je monokromatskim zračenjem koje putuje duž pozitivnog smjera x-osi. Intenzitet zračenja dan je sa:

$$I(y,z) = \begin{cases} (h-y)\,k, & \text{kada je } -h/5 < y < h \;\text{ i }\; 0 < z < v \\ 0, & \text{inače,} \end{cases} \tag{1}$$

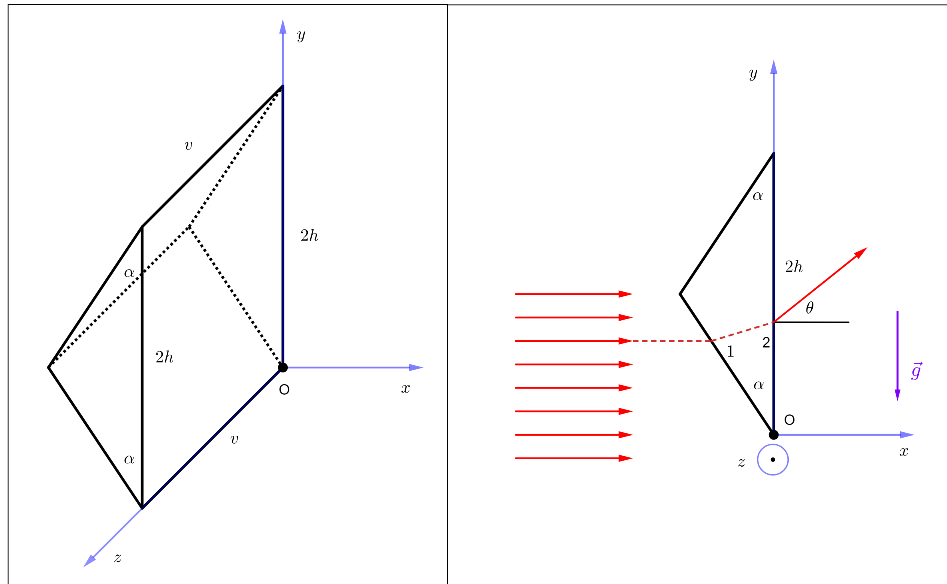
gdje je k konstanta koja ima dimenzije intenziteta po duljini.

a) Pronađite kut izlazne zrake θ (označen na slici) koja nastaje nakon dva uzastopna loma upadne svjetlosti na prizmi u ovisnosti o α i n!

b) Pretpostavite da je koeficijent transmisije na granici "1" prizme i zraka jednak η, a na granici "2" jednak 1. Odredite ukupnu silu na prizmu (zbog obasjavanja) u ovisnosti o h, v, η, α, θ i k. Zanemarite apsorpciju zračenja!

c) Kolika mora biti snaga izvora koje proivodi zračenje čiji intenzitet ima ovisnost iz (1), uz uvjet da

nema gibanja prizme u y smjeru, ako se ona nalazi u gravitacijskom polju Zemlje? Uzmite da je $\alpha = 20°$, $\rho = 2.5\,\mathrm{gcm^{-3}}$, $v = 80\,\mu\mathrm{m}$, $h = 30\,\mu m$ i $\eta = 0$ (nema transmisije). Najveća stranica plašta prizme (ona koja leži u $y - z$ ravnini) položena je na optički proziran "zid" po kojemu može kliziti bez trenja i koji sprječava gibanje u x smjeru i bilo kakve rotacije prizme.
d) Obrazložite kakva je stabilnost uvjeta ravnoteže na male pomake prizme! Kakva bi bila stabilnost uvjeta ravnoteže na male pomake da nema zračenja u području od $-h/5 < y < 0$?



Slika 2: Trostrana prizma obasjana monokromatskim zračenjem u gravitacijskom polju duž $-y$ smjera.

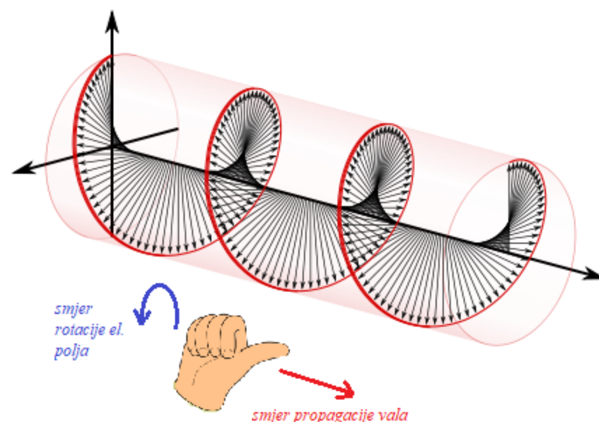
4. zadatak *(20 bodova)*
Električno polje kružno polariziranog vala koji se prostire u $+\hat{z}$ smjeru je:

$$\vec{E}_{\pm} = E\left[\cos(\omega t - kz)\,\hat{x} \pm \sin(\omega t - kz)\,\hat{y}\right], \tag{2}$$

gdje za $\vec{E}_{-}$ kažemo da polarizacija slijedi pravilo desne ruke (ako je palac desne ruke smjer propagacije vala, onda se električno polje zakreće u smjeru ostalih prstiju, kao što je prikazano na slici 3.). Analogno, $\vec{E}_{+}$ je električno polje lijevo kružno polariziranog vala. Lijevo i desno kružno polarizirani val imaju različite fazne brzine prilikom prolaska kroz plazmu (ioniziranu tvar koja sadrži slobodne elektrone) kada je prisutno dodatno statičko magnetsko polje u smjeru propagacije elektromagnetskog vala. Indeksi refrakcije lijevog/desnog kružno polariziranog vala kroz plazmu tada su:

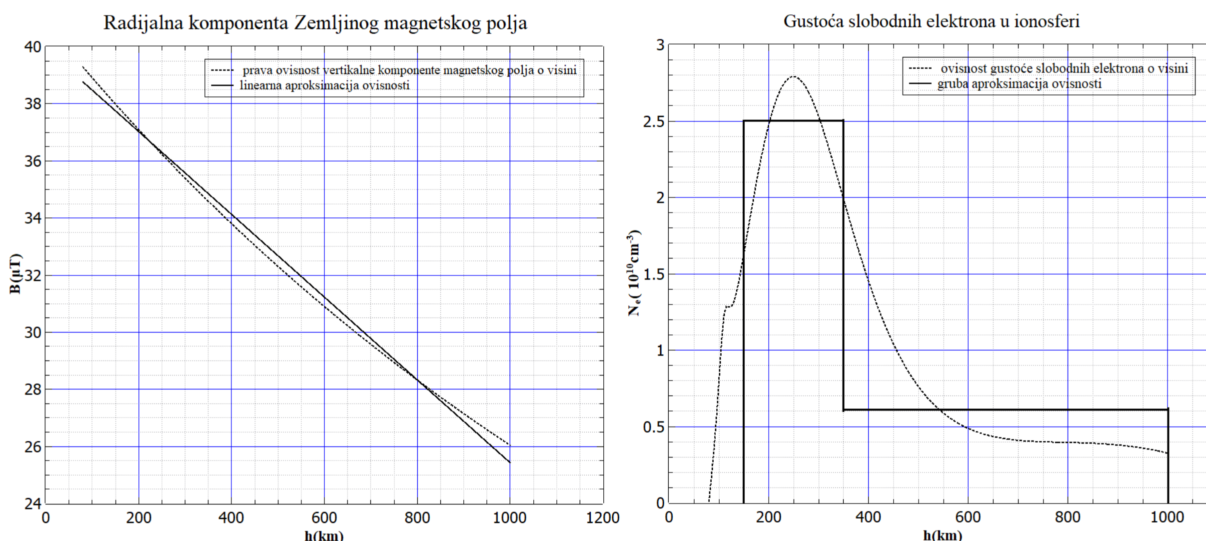
$$n_{\pm}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_c)}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m}, \quad \omega_c = \frac{eB}{mc}, \tag{3}$$

gdje je N gustoća slobodnih elektrona u plazmi, e naboj elektrona, m masa elektrona i B statičko magnetsko polje. Frekvencije ω_p i ω_c redom opisuju "prirodnu" frekvenciju titranja slobodnih elektrona u plazmi, te ciklotronsku frekvenciju.



Slika 3: Električno polje desno kružno polariziranog vala.

a) Odredi faznu razliku lijevo i desno kružno polariziranog vala frekvencija ω nakon propagacije za Δz kroz plazmu koja sadrži uniformnu gustoću slobodnih elektrona, u uniformnom magnetskom polju koje je paralelno sa smjerom propagacije valova. Rezultat izrazite kao funckiju ω, ω_p, ω_c i Δz! Vrijedi da je $\omega \gg \omega_c$, ω_p. Možete koristiti $(1+x)^{-1} \approx 1-x$ za $x \ll 1$ i $n_+ + n_- \approx 2$.
b) Prolaskom linearno polariziranog zračenja kroz isti segment plazme duljine Δz u istom statičkom magnetskom polju dolazi do zakreta kuta polarizacije zračenja (taj efekt naziva se Faradayeva rotacija). Odredi kut zakreta polarizacije u ovisnosti o ω, N, B i Δz.
c) Izračunavanjem Faradayeve rotacije (na temelju promatranja polariziranog zračenja dalekih izvora, npr. pulsara) mogu se dobiti neka saznanja o gustoći slobodnih elektrona i magnetskim poljima u međuzvjezdanom prostoru. Efekt Faradayeve rotacije događa se i pri prolasku polariziranog zračenja kroz Zemljinu ionosferu. U grafovima na slici 3. iscrtkanom linijom su zabilježene izračunate vrijednosti radijalne komponente magnetskog polja Zemlje i izmjerene vrijednosti gustoće slobodnih elektrona u ionosferi. Odredite kut zakreta linearno polariziranog zračenja frekvencije $f = 20\,\mathrm{MHz}$ zbog prolaska kroz ionosferu koristeći podatke označene punom linijom (koje su gruba aproksimacija). Pretpostavite da je smjer propagacije zračenja okomit na Zemlju.



Slika 4: Izračunati/izmjereni podaci magnetskog polja Zemlje i gustoće slobodnih elektrona u ovisnosti o nadmorskoj visini - iscrtkana linija, i aproksimirane ovisnosti - puna linija.

Vrijednosti potrebnih fizikalnih konstanti:

brzina svjetlosti - $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{ms}^{-1}$

gravitacijsko ubrzanje Zemlje - $g = 9.81\,\mathrm{ms}^{-2}$

masa elektrona - $m = 9.109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$

naboj elektrona - $e = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$

Planckova konstanta - $h = 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{m}^2\mathrm{kgs}^{-1}$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE 2021/2022

Srednje škole - 4. grupa

Rješenja i upute za bodovanje

VAŽNO: Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ako učenici riješe zadatak drugačijim, a fizikalno ispravnim načinom, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

1. zadatak *(16 bodova)*

Smjer dulje stranice pravokutnika možemo prozvati $\hat{x}$ smjerom, a smjer kraće duljine $\hat{y}$ smjerom. Zamislimo li prvo situaciju u kojoj se elektron može kretati samo u jednoj dimenziji duljine L znamo da je njegov impuls kvantiziran restrikcijom da je njegova De Broglijeva valna duljina jednaka $\lambda = 2L/n$, tj. impuls može poprimati vrijednosti:

$$p_n = \frac{h}{\lambda} = \frac{nh}{2L},\ n \in \mathbb{N}. \quad [\mathbf{3\,boda}] \tag{1}$$

Generalizacijom na dvije dimenzije slijedi da su obje komponente impulsa kvantizirane, što znači da je i ukupni impuls kvantiziran i jednak:

$$p_{n_1,n_2} = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \sqrt{\left(\frac{n_1 h}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n_2 h}{2b}\right)^2},\ n_1, n_2 \in \mathbb{N}. \quad [\mathbf{3\,boda}] \tag{2}$$

Energija je onda jednostavno:

$$E_{n_1,n_2} = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}\right). \quad [\mathbf{2\,boda}] \tag{3}$$

S obzirom da je $a = 1.5\,b$ prva tri pobuđena stanja su dana sa $(n_1, n_2) = \{(2,1), (1,2), (3,1)\}$, a osnovno sa $(n_1, n_2) = (1,1)$. **[2 boda]**

Potrebne energije fotona su tada:

$$E_1 = E_{2,1} - E_{1,1} = \frac{h^2}{8m}\cdot\frac{3}{a^2} = 31\,\text{meV}, \quad [\mathbf{2\,boda}] \tag{4}$$

$$E_2 = E_{1,2} - E_{1,1} = \frac{h^2}{8m}\cdot\frac{3}{b^2} = 71\,\text{meV}, \quad [\mathbf{2\,boda}] \tag{5}$$

$$E_3 = E_{3,1} - E_{1,1} = \frac{h^2}{8m}\cdot\frac{8}{a^2} = 84\,\text{meV}. \quad [\mathbf{2\,boda}] \tag{6}$$

2. zadatak *(14 bodova)*

a.) Za impulse i ukupne energije pozitrona i elektrona vrijedi:

$$p_\pm = m\gamma_\pm v_\pm \ \rightarrow\ E_\pm = \sqrt{m^2c^4 + p_\pm^2 c^2} = mc^2\gamma_\pm,\ \gamma_\pm = \left(1 - \frac{v_\pm^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad [\mathbf{2\,boda}] \tag{7}$$

pa zbog zakona očuvanja energije i impulsa (po komponentama) vrijedi:

$$E_f = mc^2\,(\gamma_+ + \gamma_-), \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{8}$$

$$p_f = \frac{E_f}{c} = m\,(v_+\gamma_+\cos\phi + v_-\gamma_-\cos\theta), \quad 0 = m\,(v_+\gamma_+\sin\phi - v_-\gamma_-\sin\theta), \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{9}$$

gdje su E_f i p_f energija i impuls fotona. Uvrštavanjem (8) u prvi izraz iz (9) slijedi:

$$mc^2\left(\gamma_+ + \gamma_-\right) = mc\left(v_+\gamma_+ \cos\phi + v_-\gamma_- \cos\theta\right). \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{10}$$

Očito je da gornja jednakost ne može biti zadovoljena zbog $v_\pm < c$ i $\cos\theta, \cos\phi < 1$, pa zaključujemo da se proces ne može ostvariti u vakuumu. **[2 boda]**

b.) Intenzitet zračenja nakon prolaska kroz olovo debljine 5 mm je jednostavno:

$$I = I_0 \exp(-\mu x) = 0.1\,\mathrm{Wm^{-2}} \cdot \exp\big(-1.05\,\mathrm{cm^{-1}} \cdot 0.5\,\mathrm{cm}\big) = 0.059\,\mathrm{Wm^{-2}}. \quad [\mathbf{3\,boda}] \tag{11}$$

c.) Energija deponirana u olovu je jednaka umnošku površine olovnog komada, razlike početnog i krajnjeg intenziteta, te vremenu izloženosti zračenju:

$$E = (I_0 - I)\cdot S \cdot t = (0.1 - 0.059)\,\mathrm{Wm^{-2}} \cdot (0.05\,\mathrm{m})^2 \cdot 18000\,\mathrm{s} = 1.84\,\mathrm{J}. \quad [\mathbf{4\,boda}] \tag{12}$$

3. zadatak *(20 bodova)*

a.) Iz priložene slike vidimo da mora vrijediti:

$$n\sin\beta = \sin\alpha, \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{13}$$

$$n\sin(\alpha-\beta) = \sin\theta. \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{14}$$

Raspisivanjem lijeve strane u (14) dolazimo do:

$$n\sin\alpha\cos\beta - n\sin\beta\cos\alpha = \sin\theta. \tag{15}$$

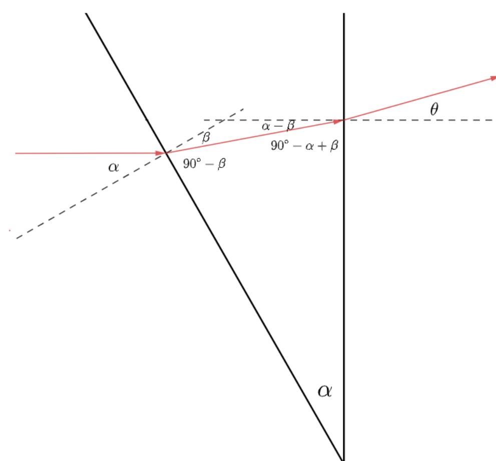
Koristeći (13) i $\cos\beta = (1-\sin^2\beta)^{-1/2}$ slijedi:

$$\sin\theta = \sin\alpha\left(\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - \cos\alpha\right), \tag{16}$$

tj. za θ vrijedi:

$$\theta = \arcsin\left[\sin\alpha\left(\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - \cos\alpha\right)\right]. \tag{17}$$

$[\mathbf{2\,boda}]$



Slika 1: Skica koja prikazuje dva uzastopna loma upadne zrake na prizmi.

b.) Možemo promotriti sliku 2. Impuls fotona (iznos) u reflektiranoj i lomljenoj zraci jednak je početnom (koji iznosi E/c gdje je E energija fotona), pa slijedi da je:

$$\Delta\vec{p}_r = \frac{E}{c}[(-1-\cos 2\alpha)\,\hat{x} - \sin 2\alpha\,\hat{y}], \quad \Delta\vec{p}_l = \frac{E}{c}[(\cos\theta - 1)\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}]. \quad [\mathbf{2\,boda}] \tag{18}$$

Sila na prizmu je jednostavno dana ukupnom promjenom impulsa u vremenu. Promjena impulsa prizme suprotna je promjeni impulsa fotona, pa vrijedi:

$$\vec{F} = \frac{N(\Delta t)\Delta\vec{p}_{prizma}}{\Delta t} = \frac{N(\Delta t)E}{c\Delta t}\left\{[(1-\eta)(1+\cos 2\alpha) + \eta(1-\cos\theta)]\,\hat{x} + [(1-\eta)\sin 2\alpha - \eta\sin\theta]\,\hat{y}\right\}, \tag{19}$$

gdje je $N(\Delta t)$ broj fotona koji udari prizmu u vremenu Δt. **[1 bod]**

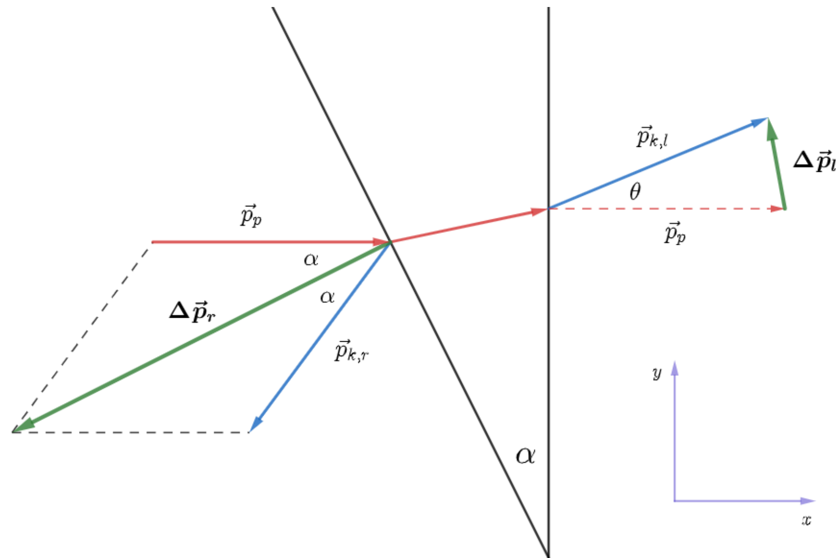
Također vrijedi da je ukupna snaga zračenja koje upada na prizmu jednaka:

$$P = \frac{N(\Delta t)E}{\Delta t} = \overline{I}S = \frac{kh^2v}{2}, \quad [\mathbf{3\,boda}] \tag{20}$$

gdje je $\overline{I}$ srednji intenzitet zračenja na prizmu.

Iz ovoga možemo dobiti omjer $N(\Delta t)/\Delta t$ koji možemo ubaciti u (7). Sređivanjem konačno slijedi izraz za silu:

$$\vec{F} = \frac{kh^2 v}{2c} \left\{ \left[1 + (1-\eta)\cos 2\alpha - \eta \cos\theta \right] \hat{x} + \left[(1-\eta)\sin 2\alpha - \eta \sin\theta \right] \hat{y} \right\}. \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{21}$$



Slika 2: Promjena impulsa jednog fotona usred refleksije na prvoj ravnini ($\Delta\vec{p}_r$) i promjena impulsa jednog fotona nakon dva uzastopna loma ($\Delta\vec{p}_l$).

c.) Izjednačavanjem iznosa y-komponente sile na prizmu zbog obasjavanja sa gravitacijskom silom dolazimo do:

$$\frac{kh^2 v}{2c} \left[(1-\eta)\sin 2\alpha - \eta \sin\theta \right] = \rho V g, \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{22}$$

a s obzirom da je volumen prizme $V = h^2 v \tan\alpha$ slijedi (uz $\eta = 0$):

$$k = \frac{\rho g c}{\cos^2\alpha}. \quad [\mathbf{2\,boda}] \tag{23}$$

Snaga izvora jednaka je:

$$P = \overline{I}_{-h/5,h} \cdot \frac{6hv}{5} = k \cdot \frac{3h}{5} \cdot \frac{6hv}{5} = \frac{18kh^2 v}{25}, \quad [\mathbf{2\,boda}] \tag{24}$$

gdje je $\overline{I}_{-h/5,h}$ srednji intenzitet za cijelo površinu za koju je intenzitet različit od nule. Uvrštavanjem (23) u (24) se dobije konačan izraz za P:

$$P = \frac{18h^2 v \rho g c}{25\cos^2\alpha} = 0.43\,\mathrm{W}. \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{25}$$

d.) Malim pomakom prizme u $+\hat{y}$ smjeru smanji se sila uzrokovana obasjavanjem, pa je ukupna sila na prizmu u $-\hat{y}$ smjeru. Malim pomakom prizme u $-\hat{y}$ smjeru ukupna sila je u $+\hat{y}$ smjeru jer intenzitet zračenja monotono raste u $-\hat{y}$ smjeru sve do $y = -h/5$. Dakle, uvjet ravnoteže je stabilan na male pomake. **[2 boda]**

Kada ne bi bilo zračenja u intervalu $-h/5 < y < 0$ onda bi malim pomakom prizme u $-\hat{y}$ smjeru ukupna sila bila u $-\hat{y}$ smjeru, tj. ravnoteža bi se bespovratno narušila. **[1 bod]**

4. zadatak *(20 bodova)*

a.) Fazna razlika se javlja zbog različitog indeksa refrakcije dvaju valova kroz plazmu, i dana je sa:

$$\Delta\phi = (k_+ - k_-)\,\Delta z = \frac{\omega \Delta z}{c}(n_+ - n_-). \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{26}$$

Iz zadatka možemo vidjeti da je:

$$n_+^2 - n_-^2 = (n_+ + n_-)(n_+ - n_-) = \frac{\omega_p^2}{\omega}\left(\frac{1}{\omega-\omega_c} - \frac{1}{\omega+\omega_c}\right). \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{27}$$

Također koristeći $(1+x)^{-1} \approx 1 - x$ za $x \ll 1$ slijedi:

$$\frac{1}{\omega \pm \omega_c} = \frac{1}{\omega}\frac{1}{1 \pm \frac{\omega_c}{\omega}} \approx \frac{1}{\omega}\left(1 \mp \frac{\omega_c}{\omega}\right), \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{28}$$

pa zajedno sa $n_+ + n_- \approx 2$ slijedi:

$$n_+ - n_- = \frac{\omega_p^2}{2\omega}\cdot\frac{1}{\omega}\left(1 + \frac{\omega_c}{\omega} - 1 + \frac{\omega_c}{\omega}\right) = \frac{\omega_p^2\omega_c}{\omega^3}, \quad [\mathbf{2\,boda}] \tag{29}$$

iz čega onda napokon dobivamo izraz za faznu razliku:

$$\Delta\phi = \frac{\omega_p^2\omega_c\Delta z}{\omega^2\, c} \quad [\mathbf{1\,bod}] \tag{30}$$

b.) Električno polje linearno polariziranog vala je dano sa $\vec{E} = A\cos(\omega t - kz)\,\hat{n}$, gdje je $\hat{n}$ smjer polarizacije. Radi jednostavnosti možemo definirati koordinatni sustav tako da je $\hat{n} = \hat{x}$. Tada možemo linearno polarizirani val rastaviti na lijevo i desno polarizirani kružni val, tj.:

$$A\cos(\omega t - kz)\,\hat{x} = \frac{A}{2}\left[\cos(\omega t - kz)\,\hat{x} + \sin(\omega t - kz)\,\hat{y}\right] + \frac{A}{2}\left[\cos(\omega t - kz)\,\hat{x} - \sin(\omega t - kz)\,\hat{y}\right]. \quad [\mathbf{3\,boda}] \tag{31}$$

Iz a.) dijela zadatka znamo da prolaskom kroz plazmu u magnetskom polju ova dva vala imaju razliku faza danu sa (30), pa je nakon prolaska kroz plazmu jednadžba za $\vec{E}$ dana sa:

$$\vec{E} = \frac{A}{2}\left\{\left[\cos(\omega t - kz + \Delta\phi)\,\hat{x} + \sin(\omega t - kz + \Delta\phi)\,\hat{y}\right] + \left[\cos(\omega t - kz)\,\hat{x} - \sin(\omega t - kz)\,\hat{y}\right]\right\}. \quad [\mathbf{3\,boda}] \tag{32}$$

Korištenjem identiteta $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ i $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ dobivamo:

$$\vec{E} = \frac{A}{2}\left[2\cos\left(\omega t - kz + \frac{\Delta\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)\hat{x} + 2\cos\left(\omega t - kz + \frac{\Delta\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)\hat{y}\right]. \quad [\mathbf{2\,boda}] \tag{33}$$

Jednadžba (33) se može preurediti u oblik:

$$\vec{E} = A\cos\left(\omega t - kz + \frac{\Delta\phi}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)\hat{x} + \sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)\hat{y}\right], \tag{34}$$

iz kojeg se jasno vidi da je prolaskom kroz plazmu zračenje i dalje linearno polarizirano, ali je kut polarizacije zakrenut za $\frac{\Delta\phi}{2}$ u odnosu na početno zračenje, tj. za kut zakreta $\Theta = \frac{\Delta\phi}{2}$ vrijedi:

$$\Theta = \frac{\omega_p^2\omega_c\Delta z}{2\omega^2\, c} = \frac{2\pi N e^3 B}{m^2 c\,\omega^2}\,\Delta z. \quad [\mathbf{2\,boda}] \tag{35}$$

d.) S grafa vidimo da je $N_1 = 2.5\times10^{10}\,\mathrm{cm}^{-3}$ između $150 - 350\,\mathrm{km}$, i $N_2 = 6\times10^{9}\,\mathrm{cm}^{-3}$ između $350 - 1000\,\mathrm{km}$. Srednje vrijednosti magnetskog polja u tim područjima su otprilike $B(250\,\mathrm{km}) = 36.3\,\mu\mathrm{T}$ i $B(675\,\mathrm{km}) = 30\,\mu\mathrm{T}$, pa je ukupni kut zakreta:

$$\Theta = \frac{e^3}{2\pi m^2 c f^2}\left[N_1\cdot B(250\,\mathrm{km})\cdot 200\,\mathrm{km} + N_2\cdot B(675\,\mathrm{km})\cdot 650\,\mathrm{km}\right] = 1.98\times10^{-3}\,\mathrm{rad}. \quad [\mathbf{4\,boda}] \tag{36}$$